Überreicht vom Verfasser.

IN WIEWEIT KANN EIN STERN MIT GROSSER GESCHWINDIGKEIT DIE STABILITÄT EINES PLANETENSYSTEMS BEEINFLUSSEN?

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

VORGELEGT

VON

WILHELM EBERT

AUS LEIPZIG.

(JULI 1895.)

STOCKHOLM

GEDRUCKT IN DER CENTRAL-DRUCKEREI

1896.

IN WIEWEIT KANN EIN STERN MIT GROSSER GESCHWINDIGKEIT DIE STABILITÄT EINES PLANETENSYSTEMS BEEINFLUSSEN?

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

VORGELEGT

VON

WILHELM EBERT

AUS LEIPZIG.

(JULI 1895.)

STOCKHOLM

GEDRUCKT IN DER CENTRAL-DRUCKEREI

1896.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

SEINEM HOCHVERERHRTEN LEHRER

HERRN PROFESSOR DR. H. SEELIGER

ALS ZEICHEN SEINER DANKBARKEIT

GEWIDMET

VON

WILHELM EBERT.

INHALTSVERZEICHNISS.

Pag.

Einleitung ..... IX—XI

ERSTER TEIL.

Darstellung der Bewegung eines Planeten durch eine mechanische Quadratur ..... 1—44

§ 1. Die Bahn des eindringenden Fixsterns um die Sonne ..... 1— 2
§ 2. Vorschriften und Hülfsformeln zur Berechung von Hyperbelephemeriden bei grossen Excentricitäten ..... 2— 6
§ 3. Wahl des Coordinatensystems und des Anfangspunktes der Zeit. (Fig. 1) 7
§ 4. Die Ephemeride des störenden Körpers ..... 7—13
§ 5. Die Anfangslage des gestörten Planeten. (Fig. 2) ..... 13—15
§ 6. Bemerkungen bezüglich der Berechnung der Störungen ..... 15—16
§ 7. Die Bahn des Planeten um die Sonne von -48^d bis -3^d ..... 16—19
§ 8. Formeln zum Übergang auf den 2ten Hauptkörper. (Einführung der Coordinaten ξ und η) ..... 19—22
§ 9. Übergang auf den 2ten Hauptkörper ..... 23—25
§ 10. Die Bewegung des Planeten um den 2ten Hauptkörper von $-4^d.5$ bis $-\frac{5^d}{32}$ ..... 25—29
§ 11. Die zweite Osculation bezüglich des 2ten Hauptkörpers bei $-0^d.25$... 30—32
§ 12. Die Bewegung des Planeten um den 2ten Hauptkörper von $-\frac{10^d}{32}$ bis $+6^d.5$. (Fig. 3) ..... 32—36
§ 13. Das Hauptresultat der mechanischen Quadratur 36
§ 14. Näherungsweise Darstellung ähnlicher Bewegungsvorgänge durch Kepler'sche Bewegungen ..... 36—37
§ 15. Über die bei Vernachlässigung der Störungen erreichte Genauigkeit ... 37—42
§ 16. Über ein Kriterium der Stabilität. (Fig. 4) ..... 42—44

ZWEITER TEIL.

Pag.

Untersuchungen über Grenzfälle der Stabilität ..... 45—77

§ 17. Behandlung verschiedener Fälle des Problems durch Zusammensetzung Kepler'scher Bewegungen ..... 46—48
§ 18. Über die grosse Achse der Bahnen um den Stern ..... 48—50
§ 19. Einleitende Bemerkungen zur analytischen Behandlung des Problems 50—51
§ 20. Darstellung von ξ, η, $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ durch x, y, $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ beim Eintritte in das Wirkungsbereich des Sterns. (Fig. 5) ..... 51—52
§ 21. Darstellung von $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ mittels Δ. (Fig. 6) ..... 52—54
§ 22. Darstellung des Winkels Δ durch die Excentricität. (Fig. 7) ..... 55—56
§ 23. Eine Formel für die Excentricität e der Bahn um den Stern ..... 56—58
§ 24. Prüfung der Formeln der Paragraphen 21, 22 und 23 an den Beispielen des § 17 ..... 58—61
§ 25. Darstellung der Stabilitätsgrenzen ..... 61—62
§ 26. Über die Berechnung der Stabilitätsgrenzen in der Bahnebene des Sterns ..... 63—66
§ 27. Bemerkungen zur Darstellung der Stabilitätsgrenzen auf der Tafel 66
§ 28. Über die Schnittpunkte der Stabilitätsgrenzen in der Bahnebene des Sterns mit dessen Apsidenlinie ..... 66—69
§ 29. Die Asymptoten der Stabilitätsgrenzen in der Bahnebene des Sterns ... 69—72
§ 30. Über einen Fall des Problems ausserhalb der Bahnebene des Sterns. (Fig. 8) ..... 72—76
§ 31. Überblick über die Hauptresultate der Arbeit ..... 76—77

Tafel 79

ABBILDUNGEN.

ERSTER TEIL.

Pag.

Fig. 1. Beziehungen zwischen der Bahn des Sterns und dem Coordinatensystem 7
» 2. Anfangslage des Planeten 14
» 3. Die Bewegung des Planeten gegen die *Sonne* zur Zeit der grossen Annäherung an den 2ten Hauptkörper 35
» 4. Die Bahn des Planeten um den 2ten Hauptkörper 43

ZWEITER TEIL.

Fig. 5. Beziehungen zwischen den Anfangslagen des Planeten und des 2ten Hauptkörpers 52
» 6. Die Drehung der Bewegungsrichtung in Bahnen um den Stern 53
» 7. Ausgezeichnete Winkel in Hyperbelbahnen 55
» 8. Anfangslage eines Planeten *ausserhalb* der Bahnebene des Sterns 72

TAFEL 79

Einleitung.

Da man unserer Sonne nicht mehr eine Sonderstellung im Weltall zuerkennt, so muss man sich vorstellen, dass auch die anderen sog. Fixsterne zum Teil Hauptkörper von Planetensystemen ähnlich dem unseren sind. Hiermit gewinnt die Untersuchung der Stabilität eines solchen Systems ein allgemeineres Interesse, auch für die Stellarastronomie.

Die Ursachen, welche die Stabilität in Frage stellen können, sind zweifacher Natur. Sie können einerseits in der Constitution des Systems selbst liegen. Auf Grund der Untersuchungen, welche man in dieser Hinsicht speciell für unser Sonnensystem durchgeführt hat, kann man dasselbe für sehr lange Zeiträume als stabil betrachten. Andererseits aber können auch Eingriffe von aussen her, also Ereignisse stellarer Natur, die Stabilität gefährden. Dabei kommt hauptsächlich die Annäherung einer grossen, fremden Masse (z. B. eines andern Sterns) in Betracht. Hierdurch könnten einzelne Planeten derartige Elementenstörungen erleiden, dass sie entweder ihrem ursprünglichen Centralkörper ganz verloren gehen, oder dass doch wenigstens der Bau des ganzen Systems wesentlich verändert würde.

Der uns nächste Teil des Raumes ist nun allerdings so sternenarm, dass hier stärkere Annäherungen der verschiedenen Sonnen an einander nur äusserst selten vorkommen können. Anders verhält es sich in den Teilen des Himmels, die in der Nähe der Milchstrasse liegen. Das häufige Aufleuchten neuer Sterne in diesen Gegenden muss auf Grund spectroscopischer Beobachtungen grösstenteils durch Collisionen zwischen Objecten verschiedener Natur erklärt werden. In erster Linie kommt hierbei der Durchgang eines Weltkörpers durch ein ausgedehntes Gebiet von Staub- oder Nebelmaterie in Betracht. In anderen Fällen könnte es sich um Zusammenstösse zweier Sonnen selbst handeln.

Um in einem Planetensysteme ähnlich dem unseren wesentliche Veränderungen hervorzurufen ist noch keineswegs der direkte Zusammenstoss eines andern Sterns mit unserer Sonne erforderlich. Der Fremdkörper braucht sich der Sonne nur auf etwa 30 Erdbahnradien (halbe grosse Achse der Neptunbahn) zu nähern, um wenigstens in den Elementen der äusseren Planeten starke Veränderungen hervorzurufen. Nehmen wir die Grösse der Sterne im Mittel gleich der unserer Sonne an, so ergiebt sich, dass die Annäherung zweier Sterne auf weniger als 30 Erdbahnradien 40 Millionen mal wahrscheinlicher ist, als ihr Zusammenstoss.

Wenn das Aufleuchten neuer Sterne in bestimmten Fällen auf Zusammenstösse zweier Sonnen zurückgeführt werden kann, so geht hieraus hervor, dass Annäherungen auf weniger als 30 Erdbahnradien in gewissen Teilen des Himmels sogar häufig sein dürften, obgleich sich ihre Folgen unserer Beobachtung entziehen.

Am häufigsten kommen offenbar Sterne mit grosser Geschwindigkeit in die Nähe anderer, da sie binnen verhältnissmässig kurzer Zeit grosse Räume durchlaufen. Ausserdem zeigen die Beobachtungen über die Eigenbewegungen, dass sich die einander nahen Sterne mit kleineren Geschwindigkeiten meist ziemlich parallel im Raume fortbewegen. Auch aus diesem Grunde sind also stärkere Annäherungen unter ihnen seltener. Die Sterne mit grossen Geschwindigkeiten hingegen durchlaufen den Raum in Richtungen, welche von denen ihrer Nachbarn völlig verschieden sind. Sie kommen daher häufiger in die Nähe anderer Sonnen und daher auch in das Bereich von Systemen, welche dem unseren ähnlich sind. In wieweit kann nun ein solcher Eindringling die Stabilität des zu betrachtenden Planetensystems beeinflussen?

Die Behandlung dieser Frage führt zu einem interessanten, bisher noch nicht discutierten, Falle des Dreikörperproblems, welcher im Folgenden erst unter specielleren Annahmen, dann allgemeiner analytisch behandelt werden soll. Wir wollen annehmen, dass der Stern mit einer heliocentrischen Geschwindigkeit von einigen hundert Kilometern in der Secunde in das Planetensystem eindringt, was den stärkeren unter den gemessenen Eigenbewegungen entspricht. Unter dieser Voraussetzung beschreibt er, wie wir sehen werden, eine fast geradlinige Bahn um die Sonne. Dadurch unterscheidet sich der vorliegende Fall des Problems wesentlich von allen andern, bisher untersuchten.

Im *ersten* Teile der Arbeit verfolgen wir unter specielleren Annahmen die Bewegung eines Planeten mittels einer mechanischen Quadratur. Dieselbe stellt die rechtwinkligen Coordinaten aller Punkte seiner Bahn bis auf wenige Einheiten der 6ten Decimale genau dar und kann daher auch umgekehrt mit Vorteil zur Prüfung analytischer Störungsmethoden verwendet werden. Selbst sehr kleine Störungsglieder müssten sich an der Hand der erhaltenen Ephemeriden nachweisen lassen. Gerade für Integrationsmethoden, welche eine allgemeinere Gültigkeit beanspruchen, dürfte eine rechnerische Prüfung an einem so extremen Falle erwünscht sein.

Das gewonnene Material wird im *zweiten* Teile verwendet, um analytisch die Bedingungen festzustellen, unter welchen ein Stern von der Masse des Centralkörpers dem Systeme einen Planeten entreisst.

I. TEIL.

Darstellung der Bewegung eines Planeten durch eine mechanische Quadratur.

Wir behandeln zunächst einen Specialfall des Problems durch eine mechanische Quadratur. Der Planet soll sich in der Bahnebene des eindringenden Sterns bewegen und sich demselben bis auf ca. 1 Sonnenradius nähern. Diese Bedingungen sind so gewählt, dass möglichst grosse Störungen auftreten, und daher kann dieser Fall als typisch für derartige Bewegungsvorgänge angesehen werden.

§ 1. *Die Bahn des eindringenden Fixsterns um die Sonne.*

Die Masse des eindringenden Fixsterns setzen wir gleich 1, d. h. gleich der Sonnenmasse, wodurch gewisse rechnerische Vereinfachungen erzielt werden, ohne dass dadurch der Allgemeinheit des Problems wesentlicher Eintrag geschieht.

Der Perihelabstand q_1 des 2ten Hauptkörpers (so wollen wir in der Folge der Kürze halber den eindringenden Stern nennen), werde gleich

$$q_1 = [0.100\,34\,33] \text{ gesetzt.}^1$$

[1] Den Logarithmus einer Zahl bezeichnen wir, wie das in der Astronomie üblich ist, stets mit [ ]. Alle auf den 2ten Hauptkörper bezüglichen Grössen werden in der Folge den Index 1 erhalten. Demnach ist $m_1 = 1$ zu setzen.

Demnach nähert sich der 2te Hauptkörper der Sonne bis auf ca. 1.26 Erdbahnradien. Er könnte also in unserem Planetensystem sich der Erdbahn von aussen her bis auf ca. $\frac{1}{4}$ Erdbahnradius nähern. Die Excentricität e_1 wählen wir gleich 143.6684, also $\lg e_1 = 2.157\,3613$. Unter diesen Annahmen folgt für die grosse Halbachse a_1 der hyperbolischen Bahn:

$$-a_1 = [7.946\,0155],$$

und für den Parameter p_1:

$$p_1 = (-a_1)(e_1^2 - 1) = q_1(e_1 + 1) = [2.260\,7170].$$

Ausserdem braucht man für die Rechnung:

$$\frac{\text{Mod}\, k\sqrt{1 + m_1}}{(-a_1)^{\frac{3}{2}}} = 12.730\,85.$$

Hierbei bedeutet Mod den Modul der briggischen Logarithmen:

$$0.4\,34\,294\,5\,[9.637\,784\,3],$$

und k die GAUSS'sche Constante:

$$0.017\,2021\,[8.235\,5814].$$

In Folge der grossen Excentricität ist die Bahn des störenden Körpers fast eine gerade Linie. Die gegenseitige Neigung der beiden Hyperbelasymptoten ergiebt sich zu: 47'.86. Die Geschwindigkeit im Perihel beträgt in astronomischen Einheiten (mittlerer Erdbahnhalbmesser und mittlerer Sonnentag): 0.26 068 [9.41 611], im Unendlichen: 0.25 888 [9.41 309], oder 449 *km* und 445 *km* in der Secunde.

§ 2. *Vorschriften und Hülfsformeln zur Berechnung von Hyperbelephemeriden bei grossen Excentricitäten.*

Da in der Astronomie Hyperbelbahnen, besonders mit so grossen Excentricitäten, selten vorkommen, so dürfte es am Platze sein, hier einsiges über die Berechnung von Hyperbelephemeriden zu sagen. Den

Index 1, welchen man bei Anwendung dieser Formeln auf die Bahn des 2ten Hauptkörpers überall hinzufügen müsste, lassen wir der Einfachheit halber weg.

Der KEPLER'schen Gleichung entspricht bei der Hyperbelbewegung die folgende:[1]

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\mathrm{Mod}\, k\sqrt{1+m}}{(-a)^{\frac{3}{2}}}\, t = (e\,\mathrm{Mod})\,\mathrm{tg}\, F - \lg \mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}F\right).$$

Hierbei bedeutet t die seit dem Periheldurchgange verflossene Zeit. Durch obige Gleichung wird ein Winkel F bestimmt, welcher mit der excentrischen Anomalie E in elliptischen Bahnen durch die Gleichung: $\cos F \times \cos E = 1$ verbunden ist, weil

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}F,$$

so dass immer der eine von beiden Winkeln *complex,* der andere *reell* ist. Man kann also unmittelbar von den bekannten Relationen für die elliptische Bewegung auf solche für die hyperbolische Bewegung übergehen, wenn man in denselben: $\cos E = \frac{1}{\cos F}$ setzt. Auf diesem Wege erhält man gewisse Formeln, welche weniger bekannt sein dürften und in der Arbeit gelegentlich verwendet werden. Wir führen hier einige derselben an:

$$(1) \qquad r = (-a)\left(\frac{e}{\cos F} - 1\right).$$

Diese Gleichung zur Berechnung des Radiusvectors in der Bahn besitzt, besonders wenn die Excentricität vom Range 1 ist, ganz ausserordentliche, rechnerische Vorzüge gegenüber der gewöhnlichen Gleichung $r = \frac{p}{1+e\cos v}$.

Ferner:

$$(2) \qquad \begin{aligned} r\cos v &= (-a)\left(e - \frac{1}{\cos F}\right) \\ r\sin v &= (-a)\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{tg}\, F. \end{aligned}$$

[1] OPPOLZER, *Bahnbestimmung der Kometen und Planeten,* 1ter Band, 2te Auflage, p. 65.

Aus Gleichung (I) folgt durch Differenzierung:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\cos F}{r} \frac{k\sqrt{1+m}}{(-a)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3}$$

In Verbindung hiermit giebt (2):

$$\begin{cases} \dfrac{d(r\cos v)}{dt} = -\dfrac{k\sqrt{1+m}\sqrt{-a}}{r}\operatorname{tg} F \\ \dfrac{d(r\sin v)}{dt} = \sqrt{-a}\sqrt{e^2-1}\dfrac{k\sqrt{1+m}}{r\cos F}. \end{cases} \tag{4}$$

Die Bestimmung des Winkels F aus (I) muss durch successive Annäherung erreicht werden. Schreibt man diese Gleichung zunächst wie folgt:

$$\operatorname{tg} F = \frac{1}{e\,\mathrm{Mod}}\left\{\frac{\mathrm{Mod}\,k\sqrt{1+m}}{(-a)^{\frac{3}{2}}}t + \lg\operatorname{tg}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}F\right)\right\} \tag{I^a}$$

so ist das zweite Glied in der Klammer gewöhnlich verhältnissmässig klein gegenüber dem ersten. Daraus folgt, dass man zu seiner Bestimmung nur eine wenig genaue Kenntniss von F zu haben braucht, um mittelst (I^a) einen viel genaueren Wert von F zu erhalten. Sehr häufig convergiert dieses Verfahren so schnell, dass man bereits bei dem 2ten oder 3ten Näherungswerte von F stehen bleiben kann. Der Controlle wegen geht man aber besser von einem Näherungswert von F sum nächstfolgenden mittelst einer Differentialformel über, wie das auch bei Auflösung der Kepler'schen Gleichung zu geschehen pflegt. Von einem Näherungswerte F_0 ausgehend erhält man nämlich mittelst folgender Gleichung einen verbesserten Wert F_1:

$$\operatorname{tg} F_1 = \frac{1}{e\,\mathrm{Mod}}\left\{\frac{\mathrm{Mod}\,k\sqrt{1+m}}{(-a)^{\frac{3}{2}}}t + \lg\operatorname{tg}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}F_0\right)\right\}.$$

Berechnet man dann die kleine Correctionsgrösse Δ nach der Gleichung:

$$\Delta = \lg\operatorname{tg}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}F_1\right) - \lg\operatorname{tg}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}F_0\right),$$

so ergiebt sich für die zu F_1 noch hinzuzufügende Correction dF_1: [1]

$$dF_1'' = \frac{\Delta}{\text{Mod}} \frac{\cos^2 F_1}{e - \cos F_1} \; 206\,264.8.$$

Wenn also Δ in Einheiten der 5ten Decimale ausgedrückt ist, so folgt:

(II) $$dF'' = \Delta . [0.67665] \frac{\cos^2 F_1}{e - \cos F_1}.$$

Ist die Excentricität wie in unserem Falle ($e_1 = 143.6684$) gross, so empfiehlt es sich, die Grösse $[0.67665] \frac{\cos^2 F_1}{e_1 - \cos F_1}$ mit dem Argumente F_1 etwa von 5 zu 5 oder 10 zu 10 Grad zu tabulieren; ist die Excentricität aber vom Range 1, so ist es geratener, die Differentialquotienten von Fall zu Fall zu berechnen. Beifolgendes Täfelchen giebt obige Grösse sowie ihren Logarithmus für die Bahn des 2ten Hauptkörpers um die Sonne.

F_1	$\lg \frac{dF'''}{\Delta}$	$\frac{dF'''}{\Delta}$
0°	8.52 24	0″.03 33
10	8.50 91	0 .03 23
20	8.46 82	0 .02 94
30	8.39 70	0 .02 50
40	8.29 03	0 .01 95
50	8.13 75	0 .01 37
60	7.91 88	0 .00 83
70	7.58 86	0 .00 39
80	6.99 92	0 .00 10
90	$-\infty$	0 .00 00

Mit Hülfe von F muss nun v bestimmt werden durch die Gleichung:

(III) $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F,$$

[1] Wenn eine und dieselbe Grösse z. B. dF bald in Bogenmass und bald in Linearmass auftritt, so soll sein:

dF diese Grösse in Linearmass.
dF' » » » Bogenminuten.
dF'' » » » Bogensecunden.

was im allgemeinen auf die gewöhnliche Weise geschehen wird. Ist jedoch die Excentricität so gross, wie in der uns vorliegenden Hyperbel ($e_1 = 143.6684$), so entwickelt man v besser in eine FOURIER'sche Reihe nach F_1, besonders, wenn es sich um Erreichung grösserer Genauigkeit handelt.

Setzt man nämlich:

$$n = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}};\quad m = \frac{n-1}{n+1},$$

so folgt:[1]

$$v = F + 2m\sin F + m^2 \sin 2F + \frac{2}{3} m^3 \sin 3F + \ldots$$

In unserem Falle ist:

$$n = 1.006\,984\,7\,[0.003\,022\,9]$$

$$m = [7.541\,603\,7]$$

und daher:

$$v_1 = F_1 + [3.157\,0588]'' \sin F_1 + [0.397\,6325]'' \sin 2F_1 + \ldots$$

Das folgende Glied bleibt unter 0".007 und kann somit weggelassen werden. Das erste Glied wurde in jedem einzelnen Falle berechnet, das zweite wird durch folgende Hülfstafel gegeben:

Argument F	$(m^2 \sin 2F)''$	Argument F
0°	0".00	90°
5	0.43	85
10	0.85	80
15	1.25	75
20	1.61	70
25	1.91	65
30	2.16	60
35	2.35	55
40	2.46	50
45	2.50	45

[1] Siehe: OPPOLZER, *Bahnbestimmung der Cometen und Planeten*, 2te Aufl. des ersten Bandes, p. 29—30; oder: BRÜNNOW, *Sphärische Astronomie*, 4te Auflage, p. 15—16.

§ 3. *Wahl des Coordinatensystems und des Anfangspunktes der Zeit.*

Da in der vorliegenden Arbeit angenommen wird, dass die Planeten wegen ihrer geringen Massen auf die Bahn des 2ten Hauptkörpers keinen merklichen Einfluss ausüben, so habe ich die Bahnebene des letzteren als Fundamentalebene angenommen, und zwar legte ich die x-Achse durch das Perihel des 2ten Hauptkörpers, die y-Achse dazu senkrecht durch die Sonne (⊙). Der 2te Hauptkörper I soll sich dabei von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse bewegen. (Vergl. Fig. 1) Seine Bahn sei AA', sein Perihel P.

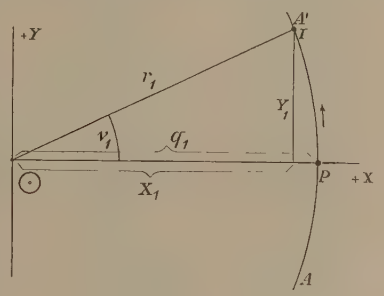


Fig. 1.

Wir wählen als Anfangspunkt der Zeit den Periheldurchgang des 2ten Hauptkörpers, als Zeiteinheit durchgehends den mittleren Sonnentag. — 4^d würde also z. B. heissen: 4 mittlere Sonnentage von dem Periheldurchgange des 2ten Hauptkörpers. Für die rechtwinkligen Coordinaten des 2ten Hauptkörpers (I) ergiebt die Figur 1:

$$x_1 = r_1 \cos v_1$$

$$y_1 = r_1 \sin v_1 .$$

§ 4. *Die Ephemeride des störenden Körpers.*

Nach den im vorhergehenden gemachten Festsetzungen ist die nun folgende Ephemeride 7 stellig gerechnet, da die bei der Quadratur mehrfach nötigen Osculationen eine solche Genauigkeit erfordern. Beifolgend geben wir: x_1, y_1, $\frac{x_1}{r_1^3}$ und $\frac{y_1}{r_1^3}$ von Tag zu Tag oder auch in engeren Intervallen; x_1 und $\frac{x_1}{r_1^3}$ sind positiv, während nach Fig. 1 y_1 und $\frac{y_1}{r_1^3}$ $\left\{\begin{matrix}\text{nach}\\\text{vor}\end{matrix}\right\}$ dem Periheldurchgange $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind.

Ephemeride des 2ten Hauptkörpers.

Epoche	x_1	y_1	$\frac{x_1}{r_1^3}$	$\frac{y_1}{r_1^3}$
0^d	+1.259 921	0.000 000	+0.629 961	0.000 000
0.25	1.259 909	0.065 170	0.627 452	0.032 456
0.5	1.259 874	0.130 339	0.620 026	0.064 144
0.75	1.259 817	0.195 506	0.607 971	0.094 349
1	1.259 737	0.260 669	0.591 736	0.122 444
1.25	1.259 634	0.325 828	0.571 899	0.147 933
1.5	1.259 511	0.390 982	0.549 117	0.170 459
1.75	1.259 368	0.456 129	0.524 079	0.189 816
2	1.259 205	0.521 269	0.497 470	0.205 936
2.25	1.259 023	0.586 401	0.469 930	0.218 874
2.5	1.258 825	0.651 525	0.442 033	0.228 781
2.75	1.258 610	0.716 641	0.414 271	0.235 882
3	1.258 379	0.781 748	0.387 047	0.240 447
3.25	1.258 134	0.846 847	0.360 679	0 242 772
3.5	1.257 876	0.911 936	0.335 401	0.243 159
3.75	1.257 606	0.977 016	0.311 377	0.241 904
4	1.257 324	1.042 087	0.288 708	0.239 285
4.25	1.257 031	1.107 150	0.267 446	0.235 557
4.5	1.256 729	1.172 204	0.247 601	0.230 948
4.75	1.256 417	1.237 249	0.229 153	0.225 657
5	1.256 097	1.302 286	0.212 060	0.219 858
5.25	1.255 768	1.367 314	0.196 264	0.213 698
5.5	1.255 433	1.432 335	0.181 697	0.207 299
5.75	1.255 091	1.497 350	0.168 283	0.200 765
6	1.254 743	1.562 355	0.155 945	0.194 177
6.25	1.254 389	1.627 353	0.144 607	0.187 603
6.5	1.254 030	1.692 345	0.134 193	0.181 097
6.75	1.253 665	1.757 330	0.124 629	0.174 699
7	1.253 296	1.822 309	0.115 846	0.168 442
7.25	1.252 923	1.887 280	0.107 780	0.162 350

Epoche	x_1	y_1	$\frac{x_1}{r_1^3}$	$\frac{y_1}{r_1^3}$
7.5[d]	+1.252 546	1.952 246	+0.100 370	0.156 439
7.75	1.252 165	2.017 207	0.093 559	0.150 721
8	1.251 780	2.082 162	0.087 295	0.145 203
8.5	1.251 002	2.212 056	0.076 224	0.134 781
9	1.250 212	2.341 930	0.066 821	0.125 172
9.5	1.249 413	2.471 785	0.058 810	0.116 347
10	1.248 605	2.601 623	0.051 958	0.108 262
10.5	1.247 789	2.731 447	0.046 078	0.100 866
11	1.246 966	2.861 253	0.041 011	0.094 103
11.5	1.246 137	2.991 046	0.036 629	0.087 920
12	1.245 303	3.120 826	0.032 826	0.082 264
12.5	1.244 463	3.250 593	0.029 512	0.077 086
13	1.243 610	3.380 350	0.026 614	0.072 341
13.5	1.242 772	3.510 096	0.024 071	0.067 987
14	1.241 921	3.639 832	0.021 833	0.063 988
14.5	1.241 067	3.769 559	0.019 856	0.060 308
15	1.240 210	3.899 277	0.018 104	0.056 919
16	1.238 488	4.158 686	0.015 159	0.050 902
17	1.236 756	4.418 066	0.012 807	0.045 750
18	1.235 018	4.677 420	0.010 908	0.041 313
19	1.233 273	4.936 743	0.009 361	0.037 470
20	1.231 522	5.196 054	0.008 088	0.034 123
21	1.229 766	5.455 340	0.007 032	0.031 194
22	1.228 006	5.714 607	0.006 149	0.028 617
23	1.226 243	5.973 856	0.005 407	0.026 339
24	1.224 476	6.233 094	0.004 777	0.024 318
25	1.222 707	6.492 310	0.004 241	0.022 516
26	1.220 935	6.751 519	0.003 780	0.020 904
27	1.219 160	7.010 715	0.003 383	0.019 457
28	1.217 384	7.269 897	0.003 040	0.018 152
29	1.215 606	7.529 069	0.002 740	0.016 973

Epoche	x_1	y_1	$\frac{x_1}{r_1^3}$	$\frac{y_1}{r_1^3}$
30^d	+1.213 827	7.788 234	+0.002 479	0.015 903
31	1.212 045	8.047 383	0.002 249	0.014 931
32	1.210 263	8.306 527	0.002 046	0.014 044
33	1.208 479	8.565 663	0.001 867	0.013 232
34	1.206 694	8.824 778	0.001 708	0.012 489
35	1.204 909	9.083 910	0.001 566	0.011 806
36	1.203 121	9.343 023	0.001 439	0.011 177
37	1.201 334	9.602 129	0.001 326	0.010 596
38	1.199 546	9.861 230	0.001 224	0.010 059
39	1.197 757	10.120 32	0.001 132	0.009 562
40	1.195 967	10.379 41	0.001 049	0.009 100
41	1.194 176	10.638 49	0.000 973	0.008 671
42	1.192 385	10.897 57	0.000 905	0.008 272
43	1.190 594	11.156 65	0.000 843	0.007 899
44	1.188 802	11.415 71	0.000 786	0.007 550
45	1.187 010	11.674 78	0.000 735	0.007 224
46	1.185 217	11.933 84	0.000 687	0.006 919
47	1.183 423	12.192 90	0.000 644	0.006 633
48	1.181 630	12.451 95	0.000 604	0.006 363
49	1.179 836	12.710 99	0.000 567	0.006 110

Diese Ephemeride wurde durch Differenzreihen geprüft. Auch wurden zur Controlle an mehreren Stellen die Integrale:

$$x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} = k\sqrt{p_1}\cdot\sqrt{2}$$

und:

$$\frac{2}{r_1} - \frac{1}{2k^2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{a_1}$$

gebildet. Auf der Tafel am Schlusse der Arbeit ist die Bahn des 2ten Hauptkörpers um die Sonne durch AA' dargestellt; sie kommt in Folge

ihrer grossen Excentricität einer geraden Linie nahe, welche mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen wird.

Ausserdem geben wir des Folgenden wegen noch die Werte obiger Grössen für engere Intervalle, welche man aus vorstehender Ephemeride durch successive Interpolation in die Mitte erhält, sowie ferner die Geschwindigkeitscomponenten des 2ten Hauptkörpers bezüglich der Sonne (6 stellige Rechnung). $\frac{dy_1}{dt}$ ist immer positiv, $\frac{dx_1}{dt}$ $\begin{matrix}\text{vor}\\ \text{nach}\end{matrix}$ dem Periheldurchgange $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ.}\end{matrix}$

x_1 , y_1 , $\frac{x_1}{r_1^3}$ und $\frac{y_1}{r_1^3}$ für engere Intervalle in der Nähe des Perihels.

Epoche	x_1	y_1	$\frac{x_1}{r_1^3}$	$\frac{y_1}{r_1^3}$
0^d	+ 1.259 921	0.000 000	+ 0.6300	0.0000
$\frac{1}{32}$	1.259 921	0.008 147	0.6299	0.0041
$\frac{2}{32}$	1.259 920	0.016 293	0.6297	0.0082
$\frac{3}{32}$	1.259 919	0.024 439	0.6295	0.0123
$\frac{4}{32}$	1.259 918	0.032 585	0.6293	0.0163
$\frac{5}{32}$	1.259 916	0.040 732	0.6289	0.0204
$\frac{6}{32}$	1.259 914	0.048 878	0.6284	0.0244
$\frac{7}{32}$	1.259 912	0.057 024	0.6280	0.0285
$\frac{8}{32}$	1.259 909	0.065 170	0.6275	0.0325

Epoche	x_1	y_1	$\frac{x_1}{r_1^3}$	$\frac{y_1}{r_1^3}$
$\frac{4}{16}$ d	+ 1.259 909	0.065 170	+ 0.6275	0.0325
$\frac{5}{16}$	1.259 903	0.081 463	0.6259	0.0405
$\frac{6}{16}$	1.259 896	0.097 755	0.6243	0.0484
$\frac{7}{16}$	1.259 885	0.114 047	0.6222	0.0563
$\frac{8}{16}$	1.259 874	0.130 339	0.6200	0.0641
$\frac{9}{16}$	1.259 862	0.146 631	0.6173	0.0718
$\frac{10}{16}$	1.259 849	0.162 923	0.6146	0.0795
$\frac{11}{16}$	1.259 833	0.179 215	0.6113	0.0869
$\frac{12}{16}$	1.259 817	0.195 506	0.6080	0.0943
$\frac{6}{8}$	1.259 817	0.195 506	0.6080	0.0943
$\frac{7}{8}$	1.259 780	0.228 089	0.6003	0.1087
1	1.259 737	0.260 669	0.5917	0.1224
$1\frac{1}{8}$	1.259 689	0.293 249	0.5822	0.1355
$1\frac{2}{8}$	1.259 634	0.325 828	0.5719	0.1479
$1\frac{3}{8}$	1.259 576	0.358 405	0.5608	0.1596
$1\frac{4}{8}$	1.259 511	0.390 982	0.5491	0.1705

$\frac{dx_1}{dt}$ und $\frac{dy_1}{dt}$ in der Nähe des Perihels.

Epoche	$\frac{dx_1}{dt}$	$\frac{dy_1}{dt}$
5.5^d	0.001 355	+ 0.260 068
5.25	0.001 327	0.260 099
5	0.001 297	0.260 131
4.75	0.001 264	0.260 164
4.5	0.001 229	0.260 198
4.25	0.001 191	0.260 232
4	0.001 150	0.260 267
3.75	0.001 105	0.260 303
3.5	0.001 058	0.260 339
3.25	0.001 006	0.260 375
3	0.000 951	0.260 410
2.75	0.000 892	0.260 446
2.5	0.000 828	0.260 480
2.25	0.000 761	0.260 513
2	0.000 689	0.260 545
1.75	0.000 614	0.260 574
1.5	0.000 534	0.260 601
1.25	0.000 451	0.260 625
1	0.000 365	0.260 645

§ 5. *Die Anfangslage des gestörten Planeten.*

Die Festlegung der Bahn des gestörten Planeten ist ebenfalls willkürlich. Um aber das Auftreten möglichst grosser Störungen zu erhalten, nehmen wir an, dass sich der Planet in der Bahnebene des 2ten Hauptkörpers bewegt. Da sich ferner der letztere sehr rasch dem Sonnensystem nähert, so sind die von ihm in grösserer Entfernung hervorgebrachten Störungen klein, jedenfalls können sie nicht in wesentlicher

Weise die Configuration des Systems beeinflussen. Wir verzichten daher auf die Behandlung derjenigen Störungen, welche der 2te Hauptkörper aus dem Unendlichen kommend auf den Planeten, der sich in der Nähe der Erdbahn bewegen soll, ausübt, und setzen die Osculation erst bei -45^d an. Zu dieser Zeit befindet sich in unserem Beispiele der 2te Hauptkörper noch weiter vom Centralkörper entfernt, als Saturn von unserer Sonne.

Für diese Zeit sollen also folgende Osculationsbedingungen stattfinden: Der Planet bewegt sich in der Bahnebene des 2ten Hauptkörpers in einer Kreisbahn um die Sonne ⊙ (vergl. Fig. 2), und swar in demselben Sinne wie der 2te Hauptkörper. In dem Augenblick, wo der 2te Hauptkörper sein Perihel P erreicht hat ($t = 0$), soll sich der Planet in Q befinden, und zwar so, dass Q in der Verbindungslinie $\odot P$ liegt. Der Abstand $d = QP$ soll einen Sonnenradius betragen. Durch diese Bedingungen ist die Bahn des Planeten vollständig definiert. Thatsächlich kommt dieser Fall des 3-Körperproblems fast einem Zusammenstosse des Planeten mit dem 2ten Hauptkörper gleich, denn man wird im allgemeinen wohl kaum voraussetzen dürfen, dass ein Fixstern mit der Masse der Sonne einen wesentlich kleineren Halbmesser als diese hat.

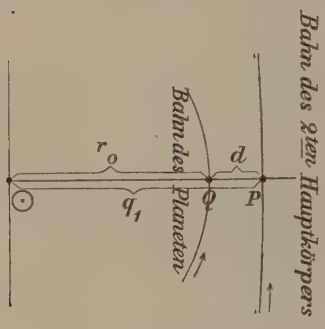


Fig. 2.

Nimmt man mit dem Berliner Jahrbuch den Sonnenradius zu 16′ 1″. 2 an (linear = 0.004 6600), so ergiebt sich für den Radius der Kreisbahn r_0, die der Planet um die Sonne beschreibt:

$$r_0 = 1.255\ 2610\ [0.098\ 734\ 0],$$

für seine mittlere tägliche Bewegung n:

$$n = 42'\ 2''. 932.$$

Hier, wie überall im folgenden, wurde die *Masse des Planeten gleich Null* gesetzt, da ja in einem dem unseren ähnlichen Planetensysteme die Massen der Planeten nicht im Stande sein würden, auf die Bahn des 2ten Hauptkörpers einen merklichen Einfluss auszuüben. Es berechnen sich demnach

die rechtwinkligen, ungestörten Coordinaten x_0 und y_0 des Planeten nach den Formeln:

$$M_0 = nt$$
$$x_0 = r_0 \cos M_0$$
$$y_0 = r_0 \sin M_0,$$

wo t die jeweilige Epoche ist.

§ 6. *Bemerkungen bezüglich der Berechnung der Störungen.*

Von den verschiedenen Methoden der speciellen Störungen wählte ich die ENCKE'sche Methode, weil diese die eigentlich gesuchten Grössen, die rechtwinkligen Coordinaten, am directesten giebt. Dass diese Methode neben ihren Vorteilen in ähnlichen Fällen auch gewisse Nachteile hat, wird im Verlaufe der Arbeit ersichtlich werden.

Bezeichnet man mit x_0 und y_0 die ungestörten Coordinaten des Planeten, mit δx und δy die entsprechenden Störungen, so sind die wahren Coordinaten des Planeten $x = x_0 + \delta x$ und $y = y_0 + \delta y$.

Die ENCKE'schen Grundgleichungen haben dann in unserem Falle die Form:[1]

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\delta x}{dt^2} &= k^2\left\{\frac{x_1 - x}{\rho^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right\} + k^2\left\{\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}\right\} \\ \frac{d^2\delta y}{dt^2} &= k^2\left\{\frac{y_1 - y}{\rho^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right\} + k^2\left\{\frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3}\right\} \end{aligned}$$

wo ρ der wahre Abstand Planet 2ter Hauptkörper, r_0 und r der ungestörte und wahre Abstand Planet-Sonne, und r_1 der Abstand 2ter Hauptkörper-Sonne sind.

Führt man mit ENCKE die Grösse

$$q = \frac{\left(x_0 + \frac{1}{2}\delta x\right)\delta x + \left(y_0 + \frac{1}{2}\delta y\right)\delta y}{r_0^2}$$

---

[1] OPPOLZER, *Bahnbestimmung*, Band II, p. 73.

ein, so nehmen die obigen Gleichungen folgende Form an:

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\delta x}{dt^2} &= k^2\left\{\frac{x_1 - x}{\rho^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right\} + \frac{k^2}{r_0^3}\{fqx - \delta x\} \\ \frac{d^2\delta y}{dt^2} &= k^2\left\{\frac{y_1 - y}{\rho^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right\} + \frac{k^2}{r_0^3}\{fqy - \delta y\}. \end{aligned}$$

Von der Oppolzer'schen Abänderung[1] der Encke'schen Methode wurde kein Gebrauch gemacht, sondern δx und δy der Quadratur extrapolatorisch entnommen, wie dies auch schon Encke selbst zu thun pflegte. Dabei wurde z. T. nach Encke mit den Gleichungen (B), z. T. nach anderen[2] direct mit den Gleichungen (A) gerechnet.

Da die bei der Quadratur zur Anwendung gelangenden Intervalle sehr verschieden waren, so lag des öfteren die Aufgabe einer Intervallhalbierung oder Verdoppelung vor, auf welche in den gebräuchlichen Lehrbüchern der Bahnrechung gewöhnlich nicht eingegangen wird, für die jedoch Herr Professor H. Seeliger eigene Formeln zur Neubestimmung der Integrationsconstanten aufgestellt hat.[3] Im vorliegenden Falle gestaltete sich indessen die Aufgabe einfacher, weil das Glied $-\frac{1}{240}f^{II}(a + iw)$ immer weggelassen werden konnte, wegen der Kleinheit der Intervalle. Ausserdem wurden die Integrationsconstanten dadurch direct geprüft, dass die beiden Quadraturen (mit dem engeren und weiteren Intervalle) für mehrere Epochen neben einander ausgeführt wurden.

§ 7. *Die Bahn des Planeten um die Sonne von* -48^d *bis* -3^d.

Zunächst geben wir diejenigen Grössen, welche unter obigen (§ 5) Osculationsbedingungen die Bahn des Planeten von -48^d bis -3^d bestimmen, nämlich x_0 und y_0, die ungestörten Coordinaten des Planeten; δx und δy die Störungen in Einheiten der 7ten Decimale, x und y die

---

[1] Oppolzer, *Bahnbestimmung,* Band II, p. 78—81.

[2] H. Seeliger, *Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri.* Abh. der Münchner Ak., Bd. XVII, 1888. — v. Härdtl, *Skizzen zu einem speciellen Fall des Problems der 3 Körper.* Abh. der Münchner Ak., Bd. XVII, 1888.

[3] H. Seeliger, *Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ cancri.* Denkschriften der Wiener Akademie 1881, Band XLIV, S. 35.

wahren Coordinaten des Planeten. Auf der Tafel stellt PP' die Bahn des Planeten um die Sonne dar. Das hier gegebene Stück derselben (etwa von P in der Figur bis zur Bahn des 2ten Hauptkörpers AA') unterscheidet sich nur wenig von einer Kreisbahn um die Sonne.

Bahn des Planeten um die Sonne von -48^d bis -3^d.

Epoche	x_0	∂x in Einheiten der 7ten Decimale	x	y_0	∂y in Einheiten der 7ten Decimale	y
-48^d	+ 1.045 060	— 8	+ 1.045 059	— 0.695 363	— 13	— 0.695 364
— 46	+ 1.061 756	— 1	+ 1.061 756	— 0.669 593	— 1	— 0.669 593
— 44	+ 1.077 818	— 1	+ 1.077 818	— 0.643 422	— 2	— 0.643 422
— 42	+ 1.093 231	— 9	+ 1.093 230	— 0.616 864	— 14	— 0.616 865
— 40	+ 1.107 992	— 27	+ 1.107 989	— 0.589 939	— 41	— 0.589 943
— 38	+ 1.122 092	— 57	+ 1.122 086	— 0.562 661	— 84	— 0.562 669
— 36	+ 1.135 521	— 99	+ 1.135 511	— 0.535 045	— 144	— 0.535 059
— 34	+ 1.148 268	— 158	+ 1.148 252	— 0.507 110	— 224	— 0.507 132
— 32	+ 1.160 329	— 235	+ 1.160 305	— 0.478 870	— 328	— 0.478 903
— 30	+ 1.171 697	— 336	+ 1.171 663	— 0.450 344	— 458	— 0.450 390
— 28	+ 1.182 361	— 465	+ 1.182 314	— 0.421 550	— 620	— 0.421 612
— 27	+ 1.187 430	— 542	+ 1.187 376	— 0.407 057	— 714	— 0.407 128
— 26	+ 1.192 317	— 629	+ 1.192 254	— 0.392 503	— 819	— 0.392 585
— 25	+ 1.197 031	— 727	+ 1.196 958	— 0.377 884	— 935	— 0.377 978
— 24	+ 1.201 561	— 837	+ 1.201 477	— 0.363 220	— 1063	— 0.363 326
— 23	+ 1.205 917	— 961	+ 1.205 821	— 0.348 496	— 1204	— 0.348 616
— 22	+ 1.210 086	— 1101	+ 1.209 976	— 0.333 721	— 1361	— 0.333 857
— 21	+ 1.214 080	— 1259	+ 1.213 954	— 0.318 895	— 1536	— 0.319 049
— 20	+ 1.217 889	— 1437	+ 1.217 745	— 0.304 021	— 1730	— 0.304 194
— 19	+ 1.221 517	— 1640	+ 1.221 353	— 0.289 103	— 1946	— 0.289 298
— 18	+ 1.224 960	— 1870	+ 1.224 773	— 0.274 140	— 2188	— 0.274 359
— 17	+ 1.228 223	— 2132	+ 1.228 010	— 0.259 137	— 2460	— 0.259 383
— 16	+ 1.231 297	— 2432	+ 1.231 054	— 0.244 094	— 2767	— 0.244 371
— 15	+ 1.234 192	— 2778	+ 1.233 914	— 0.229 016	— 3117	— 0.229 328
— 14	+ 1.236 900	— 3177	+ 1.236 582	— 0.213 904	— 3517	— 0.214 256

Epoche	x_0	∂x in Einheiten der 7ten Decimale	x	y_0	∂y in Einheiten der 7ten Decimale	y
— 13.5^d	+ 1.238 186	— 3401	+ 1.237 846	— 0.206 335	— 3740	— 0.206 709
— 13	+ 1.239 428	— 3642	+ 1.239 064	— 0.198 759	— 3980	— 0.199 157
— 12.5	+ 1.240 617	— 3903	+ 1.240 227	— 0.191 175	— 4240	— 0.191 599
— 12	+ 1.241 763	— 4186	+ 1.241 344	— 0.183 584	— 4521	— 0.184 036
— 11.5	+ 1.242 863	— 4493	+ 1.242 414	— 0.175 986	— 4827	— 0.176 469
— 11	+ 1.243 917	— 4828	+ 1.243 434	— 0.168 382	— 5161	— 0.168 898
— 10.5	+ 1.244 926	— 5193	+ 1.244 407	— 0.160 771	— 5528	— 0.161 324
— 10.0	+ 1.245 883	— 5592	+ 1.245 324	— 0.153 155	— 5931	— 0.153 748
— 9.5	+ 1.246 794	— 6031	+ 1.246 191	— 0.145 532	— 6378	— 0.146 170
— 9.0	+ 1.247 663	— 6512	+ 1.247 012	— 0.137 905	— 6876	— 0.138 593
— 8.5	+ 1.248 483	— 7044	+ 1.247 779	— 0.130 272	— 7433	— 0.131 015
— 8.0	+ 1.249 254	— 7632	+ 1.248 491	— 0.122 634	— 8061	— 0.123 440
— 7.5	+ 1.249 983	— 8285	+ 1.249 154	— 0.114 992	— 8774	— 0.115 869
— 7.0	+ 1.250 663	— 9013	+ 1.249 762	— 0.107 345	— 9591	— 0.108 304
— 6.5	+ 1.251 297	— 9826	+ 1.250 314	— 0.099 695	— 10 536	— 0.100 749
— 6.25	+ 1.251 591	— 10 270	+ 1.250 564	— 0.095 867	— 11 065	— 0.096 974
— 6.0	+ 1.251 880	— 10 739	+ 1.250 806	— 0.092 040	— 11 639	— 0.093 204
— 5.75	+ 1.252 157	— 11 238	+ 1.251 033	— 0.088 211	— 12 262	— 0.089 437
— 5.5	+ 1.252 420	— 11 768	+ 1.251 243	— 0.084 382	— 12 941	— 0.085 676
— 5.25	+ 1.252 674	— 12 331	+ 1.251 441	— 0.080 552	— 13 684	— 0.081 920
— 5.0	+ 1.252 917	— 12 930	+ 1.251 624	— 0.076 721	— 14 500	— 0.078 171
— 4.75	+ 1.253 144	— 13 569	+ 1.251 787	— 0.072 889	— 15 398	— 0.074 429
— 4.5	+ 1.253 360	— 14 249	+ 1.251 935	— 0.069 057	— 16 391	— 0.070 696
— 4.25	+ 1.253 566	— 14 975	+ 1.252 068	— 0.065 224	— 17 494	— 0.066 973
— 4.0	+ 1.253 759	— 15 750	+ 1.252 184	— 0.061 390	— 18 725	— 0.063 263
— 3.75	+ 1.253 940	— 16 577	+ 1.252 282	— 0.057 556	— 20 104	— 0.059 566
— 3.5	+ 1.254 111	— 17 461	+ 1.252 365	— 0.053 722	— 21 659	— 0.055 888
— 3.25	+ 1.254 271	— 18 406	+ 1.252 430	— 0.049 887	— 23 422	— 0.052 229
— 3	+ 1.254 414	— 19 415	+ 1.252 472	— 0.046 051	— 25 433	— 0.048 594

Die indirecten Glieder wurden mit der f Tafel bis $-4^d.5$ incl. 4-stellig, von da ab 5-stellig gerechnet. Die übrigen Grössen beruhen auf 6-stelliger Rechnung.

Die Berechnung der Grössen: $\frac{d^2\delta x}{dt^2}$ und $\frac{d^2\delta y}{dt^2}$ gestaltet sich sehr eigenartig. Während man sonst gewöhnt ist, dass die indirecten Glieder $\left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}\right.$ und $\left.\frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3}\right)$ die Hauptbeträge liefern, ist das hier durchaus nicht der Fall. Im Maximum erreichen die indirecten Glieder in beiden Coordinatenrichtungen den hundertsten Teil der directen. Der Grund liegt darin, dass einerseits die directen Glieder mit dem grossen Massenfactor 1 behaftet sind, andererseits die Störungen in Folge der raschen Bewegung des störenden Körpers nicht sehr anwachsen können, obgleich die störenden Kräfte sehr gross sind. Daher beträgt bei -3^d die Störung in der heliocentrischen Länge nur etwa $-7'$, im Radiusrector noch weniger, was in Anbetracht der grossen störenden Kräfte als sehr gering anzusehen ist.

§ 8. *Formeln zum Uebergang auf den 2ten Hauptkörper. (Einführung der Coordinaten ξ und η).*

Bei -3^d steht der Planet dem 2ten Hauptkörper schon bedeutend näher als der Sonne. Es war daher vorteilhafter, von da ab den 2ten Hauptkörper als Centralkörper und die Sonne als störenden Körper zu betrachten. Die rechtwinkligen Coordinaten des Planeten, bezogen auf den 2ten Hauptkörper und gerechnet in derselben Richtung wie x und y seien ξ und η.

Dann ist:

$$x = x_1 + \xi$$

$$y = y_1 + \eta.$$

Die Formeln zum Uebergang auf den 2ten Hauptkörper stimmen im wesentlichen mit den sonst bekannten[1] überein. Da dieselben jedoch später noch öfter benutzt werden, so stellen wir sie hier in kurzer Uebersicht zusammen.

---

[1] Oppolzer, *Bahnbestimmung*, Bd II, p. 100—104.

Man ermittelt x_0, y_0, ∂x, ∂y, x_1 und y_1 und rechnet:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\sin v_1 \, k\sqrt{2}}{\sqrt{p_1}}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{k\sqrt{2}\, e_1}{\sqrt{p_1}} + \cos v_1 \cdot \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{p_1}}$$

und

$$\frac{dx_0}{dt} = -y_0 n, \quad \frac{dy_0}{dt} = +x_0 n$$

wo die mittlere tägliche Bewegung des Planeten in Linearmass $n = \pm \frac{k}{r_0^{\frac{3}{2}}}$ ist, je nachdem der Planet gegen die Sonne recht- oder rückläufig ist.

$\frac{dx_1}{dt}$ und $\frac{dy_1}{dt}$ kann man mit Hülfe des Flächensatzes controllieren:

$$x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} = k\sqrt{2}\sqrt{p_1}.$$

$\frac{d\partial x}{dt}$ und $\frac{d\partial y}{dt}$ erhält man durch die mechanische Quadratur. Man rechnet nun:

$$x = x_0 + \partial x; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\partial x}{dt}$$

$$y = y_0 + \partial y; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\partial y}{dt}$$

$$\xi = x - x_1; \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}$$

$$\eta = y - y_1; \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}.$$

Für die weitere Rechnung bilden ξ, η, $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ das Fundament.

Die Länge des Planeten in seiner Bahn um den 2ten Hauptkörper u (gerechnet von der ξ Achse) und sein Radiusvector ρ bestimmen sich nach den Gleichungen:

$$\xi = \rho \cos u$$

$$\eta = \rho \sin u.$$

Die übrigen Grössen bezeichnen wir wie gewöhnlich, nur sei noch erwähnt, dass ω (die Perihellänge) ebenfalls von der ξ Achse aus gerechnet wird. Ferner gilt im folgenden das $\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}$ Vorzeichen, je nachdem der Planet um den 2ten Hauptkörper $\begin{matrix}\text{rechtläufig}\\ \text{rückläufig}\end{matrix}$ ist.

Man findet jetzt:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt}\right)$$

$$k\sqrt{p} = \pm\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)$$

e, v, ω und $-a$ bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$e\sin v = \frac{\sqrt{p}}{k}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$$

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1$$

$$\omega = u \mp v$$

$$(-a) = \frac{p}{e^2 - 1}.$$

Es wird hier sogleich eine Hyperbel vorausgesetzt, denn in allen für uns in Betracht kommenden Fällen beschreibt der Planet um den 2ten Hauptkörper (in Folge der grossen Geschwindigkeit des letzteren gegen die Sonne) eine hyperbolische Bahn. Für die bisjetzt gefundenen Grössen wandte ich 2 Controllen an:

(1)
$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\rho} - \frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right];$$

(2)
$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \mp\sin u \cdot \dfrac{k}{\sqrt{p}} \mp \dfrac{ek}{\sqrt{p}}\sin\omega \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \pm\dfrac{k}{\sqrt{p}}\cos u \pm \dfrac{ek}{\sqrt{p}}\cos\omega \\ \xi = \rho\cos u \\ \eta = \rho\sin u \end{cases}$$

Die Formeln (2) lassen sofort Quadrantenfehler erkennen.

F wird am besten aus:

$$\frac{e}{\cos F} = 1 + \frac{\rho}{(-a)}$$

berechnet. Als Controlle für F kann die Formel:

$$\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}F}$$

dienen, welche auch, wenn e nahe gleich 1 ist, mit Vorteil zur Bestimmung von e verwendet wird.

Mittels:

$$\frac{\text{Mod.}\, k}{(-a)^{\frac{3}{2}}} t = (e\,\text{Mod.})\operatorname{tg} F - \lg\operatorname{tg}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}F\right)$$

bestimmt man dann die seit dem Periheldurchgange verflossene Zeit t und schliesslich die Zeit des Periheldurchganges selbst.

Zur Controlle rechnet man dann umgekehrt:

$$\operatorname{tg} F = \frac{1}{e\,\text{Mod.}}\left[\frac{\text{Mod.}\, k}{(-a)^{\frac{3}{2}}} t + \lg\operatorname{tg}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}F\right)\right]$$

und schliesslich:

$$\rho = (-a)\left(\frac{e}{\cos F} - 1\right),$$

wodurch F endgültig geprüft wird.

Beiläufig geben wir hier einige bei diesen Rechnungen häufig in Anwendung kommende Constanten:

$$\begin{aligned} \text{Mod.} &= [9.637\,784\,3] \\ \text{Mod.}\, k &= [7.873\,365\,7] \\ k &= [8.235\,581\,4] \\ k'' &= [3.550\,006\,6]. \end{aligned}$$

§ 9. *Übergang auf den 2ten Hauptkörper.*

Wählt man als Osculationsepoche -4^d, so gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

x_0	+ 1.253 7588	y_0	− 0.061 3905
δx	− 1 5750	δy	− 1 8725
x	+ 1.252 1838	y	− 0.063 2630
x_1	+ 1.257 3237	y_1	− 1.042 0873
ξ	− 0.005 1399	η	+ 0.978 8243

$\frac{dx_0}{dt}$	+ 0.000 750 899	$\frac{dy_0}{dt}$	+ 0.015 335 375
$\frac{d\delta x}{dt}$	− 320 171	$\frac{d\delta y}{dt}$	− 520 428
$\frac{dx}{dt}$	+ 0.000 430 728	$\frac{dy}{dt}$	+ 0.014 814 947
$\frac{dx_1}{dt}$	+ 0.001 149 863	$\frac{dy_1}{dt}$	+ 0.260 267 779
$\frac{d\xi}{dt}$	− 0.000 719 135	$\frac{d\eta}{dt}$	− 0.245 452 832

Die Bewegung des Planeten um den 2ten Hauptkörper ist demnach rechtläufig; d. h. sie erfolgt in demselben Sinne, wie die des 2ten Hauptkörpers um die Sonne.

Mittels dieser Werte von ξ, η, $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ wurden nun 7-stellig die Bahnelemente des Planeten bezüglich des 2ten Hauptkörpers berechnet.

Es ergab sich:

$$\lg p = 8.115\,787\,4$$

$$\lg e = 0.280\,035\,9$$

$$\lg(-a) = 7.695\,603\,6$$

$$\omega = 211^\circ\,28'\,59''.914$$

$$\lg\left(\frac{1}{e\,\mathrm{Mod.}}\right) = 0.082\,179\,8$$

$$\lg\frac{\mathrm{Mod.}\,k}{(-a)^{\frac{3}{2}}} = 1.329\,960\,3.$$

Zeit des Periheldurchganges: $-0^d.080\,284$

$$\lg\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = 0.253\,1466.$$

Die Geschwindigkeitscomponenten berechnen sich nach den Formeln:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\sin u\,[9.177\,6877] + 0.149\,831\,17$$

$$\frac{d\eta}{dt} = +\cos u\,[9.177\,6877] - 0.244\,662\,20.$$

Dieses Elementensystem ergiebt für die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten bei -4^d die Werte:

$$\xi = -0.005\,1400 \qquad \eta = +0.978\,8244$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -0.000\,719\,14 \qquad \frac{d\eta}{dt} = -0.245\,452\,77,$$

welche mit den obigen Ausgangswerten sehr gut übereinstimmen.

Aus dem Werte für die Excentricität folgt, dass die beiden Hyperbelasymptoten gegen einander um: $63^\circ\,18'.2$ geneigt sind, was später für die weitere Bewegung des Planeten bedeutungsvoll ist. Wenn der Planet sich bewegte, ohne vom 2ten Hauptkörper beeinflusst zu sein, so würde er demselben bei $0^d.0$ am nächsten sein; nach obigem aber findet jetzt die grösste Annäherung um ca. 2 Stunden eher statt. Der kleinste Abstand

des Planeten vom 2ten Hauptkörper betrug ursprünglich einen Sonnenradius; wenn von -4^d ab keine Störungen durch die Sonne hervorgebracht würden, so wäre er nur noch gleich 0.9642 Sonnenradien.

§ 10. *Die Bewegung des Planeten um den 2ten Hauptkörper von* $-4^d.5$ *bis* $-\frac{5}{32}^d$.

Um diese für die weitere Rechnung so wichtige Osculation nochmals zu prüfen, sind die beiden mechanischen Quadraturen, welche die Störungen für die Bahn um die Sonne und um den zweiten Hauptkörper geben, für einige Epochen gleichzeitig gerechnet.

Die Quadratur in § 7 lief bis $-3^d.0$. Daher lasse ich die Quadratur, welche die Bewegung um den 2ten Hauptkörper giebt, schon bei $-4^d.5$ beginnen, und bezeichne analog dem früheren mit ξ_0 und η_0 die ungestörten Coordinaten des Planeten bezüglich des 2ten Hauptkörpers. Ferner mit $\delta\xi$ und $\delta\eta$ die Störungen, und mit ξ und η die wahren Werte dieser Coordinaten. Dann ist:

$$\xi = \xi_0 + \delta\xi, \qquad \eta = \eta_0 + \delta\eta.$$

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$\frac{d^2\delta\xi}{dt^2} = k^2\left(\frac{\xi_0}{\rho_0^3} - \frac{\xi}{\rho^3}\right) + k^2\left|-\frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3}\right|$$

$$\frac{d^2\delta\eta}{dt^2} = k^2\left(\frac{\eta_0}{\rho_0^3} - \frac{\eta}{\rho^3}\right) + k^2\left|-\frac{y}{r^3} + \frac{y_1}{r_1^3}\right|.$$

Der später folgenden Quadratur entnehmen wir hier $\delta\xi$ und $\delta\eta$ für einige Epochen und vergleichen die Werte von x und y, welche sich ergeben, wenn man die Sonne und den 2ten Hauptkörper als Centralkörper betrachtet.

Centralkörper: Sonne.

Epoche	— 4.5	— 3.75	— 3.0
x_0	+ 1.253 3599	+ 1.253 9408	+ 1.254 4159
∂x	— 1 4249	— 1 6577	— 1 9415
x	+ 1.251 9350	+ 1.252 2831	+ 1.252 4744
y_0	— 0.069 0570	— 0.057 5564	— 0.046 0509
∂y	— 1 6391	— 2 0104	— 2 5433
y	— 0.070 6961	— 0.059 5668	— 0.048 5942

Centralkörper: 2ter Hauptkörper.

Epoche	— 4.5	— 3.75	— 3.0
ξ_0	— 0.004 7803	— 0.005 3197	— 0.005 8579
$\partial\xi$	— 133	— 31	— 467
ξ	— 0.004 7936	— 0.005 3228	— 0.005 9046
x_1	+ 1.256 7286	+ 1.257 6061	+ 1.258 3788
x	+ 1.251 9350	+ 1.252 2833	+ 1.252 4742
η_0	+ 1.101 5150	+ 0.917 4511	+ 0.733 1851
$\partial\eta$	— 72	— 19	— 314
η	+ 1.101 5078	+ 0.917 4492	+ 0.733 1537
y_1	— 1.172 2038	— 0.977 0164	— 0.781 7480
y	— 0.070 6960	— 0.059 5672	— 0.048 5943

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung der 2 auf verschiedenem Wege gefundenen Werte von x und y so gut, als man dies nur bei 7-stelliger Rechnung erwarten kann.

Mit den so nochmals geprüften Osculationselementen des § 9 wurde nun 6-stellig eine Ephemeride für ξ_0 und η_0 berechnet und vor ihrer Heranziehung zur Quadratur durch Differenzreihen geprüft.

Bei der Quadratur wurden die indirecten Glieder bis -1^d inclusive mittels der f Tafel berechnet, und zwar bis $-1^d.75$ inclusive 4-stellig, dann 5-stellig; von $-\frac{7}{8}^d$ bis $-\frac{5}{32}^d$ ohne f Tafel 6-stellig. Auch die ganze übrige Rechnung bei Bildung der Differentialquotienten wurde 6-stellig ausgeführt.

Die nachfolgende Zusammenstellung giebt die wichtigsten Grössen für die Bewegung des Planeten im Zeitraume von $-4^d.5$ bis $-\frac{5}{32}^d$, nämlich: ξ_0 und η_0 die ungestörten Coordinaten des Planeten bezüglich des 2ten Hauptkörpers, $\partial\xi$ und $\partial\eta$ die zugehörigen Störungen in Einheiten der 7ten Decimale, endlich ξ und η die entsprechenden wahren Coordinaten; ferner x und y die wahren Coordinaten des Planeten bezüglich der Sonne.

Die Bahn des Planeten um den 2ten Hauptkörper von $-4^d.5$ bis $-\frac{5}{32}^d$.

Epoche	ξ_0	$\partial\xi$ in Einheiten der 7ten Decimale	ξ	η_0	$\partial\eta$ in Einheiten der 7ten Decimale	η	x	y
— 4.5	— 0.004 780	— 133	— 0.004 793	+ 1.101 515	— 75	+ 1.101 507	+ 1.251 936	— 0.070 697
— 4.25	— 0.004 958	— 33	— 0.004 961	+ 1.040 176	— 19	+ 1.040 174	+ 1.252 070	— 0.066 976
— 4	— 0.005 140	0	— 0.005 140	+ 0.978 824	0	+ 0.978 824	+ 1.252 184	— 0.063 263
— 3.75	— 0.005 320	— 31	— 0.005 323	+ 0.917 451	— 19	+ 0.917 449	+ 1.252 283	— 0.059 567
— 3.5	— 0.005 498	— 123	— 0.005 510	+ 0.856 060	— 78	+ 0.856 052	+ 1.252 366	— 0.055 884
— 3.25	— 0.005 679	— 270	— 0.005 706	+ 0.794 636	— 176	+ 0.794 618	+ 1.252 428	— 0.052 229
— 3.0	— 0.005 858	— 467	— 0.005 905	+ 0.733 185	— 314	+ 0.733 154	+ 1.252 474	— 0.048 594
— 2.75	— 0.006 036	— 711	— 0.006 107	+ 0.671 701	— 492	+ 0.671 652	+ 1.252 503	— 0.044 989
— 2.5	— 0.006 215	— 996	— 0.006 315	+ 0.610 174	— 709	+ 0.610 103	+ 1.252 510	— 0.041 422
— 2.25	— 0.006 393	— 1316	— 0.006 525	+ 0.548 601	— 965	+ 0.548 504	+ 1.252 498	— 0.037 897
— 2	— 0.006 570	— 1667	— 0.006 737	+ 0.486 963	— 1258	+ 0.486 837	+ 1.252 468	— 0.034 432
— 1.75	— 0.006 747	— 2044	— 0.006 951	+ 0.425 247	— 1587	+ 0.425 088	+ 1.252 417	— 0.031 041
— 1.5	— 0.006 921	— 2441	— 0.007 165	+ 0.363 427	— 1948	+ 0.363 232	+ 1.252 346	— 0.027 750

Epoche	ξ_0	$\delta\xi$ in Einheiten der 7ten Decimale	ξ	η_0	$\delta\eta$ in Einheiten der 7ten Decimale	η	x	y
— 1 3/8	— 0.007 007	— 2646	— 0.007 272	+ 0.332 468	— 2140	+ 0.332 254	+ 1.252 304	— 0.026 151
— 1 2/8	— 0.007 093	— 2853	— 0.007 378	+ 0.301 465	— 2339	+ 0.301 231	+ 1.252 256	— 0.024 597
— 1 1/8	— 0.007 177	— 3064	— 0.007 483	+ 0.270 411	— 2546	+ 0.270 156	+ 1.252 206	— 0.023 093
— 1	— 0.007 260	— 3276	— 0.007 588	+ 0.239 296	— 2759	+ 0.239 020	+ 1.252 149	— 0.021 649
— 7/8	— 0.007 3405	— 3489	— 0.007 6894	+ 0.208 0990	— 2980	+ 0.207 8010	+ 1.252 091	— 0.020 288
— 6/8	— 0.007 4166	— 3701	— 0.007 7867	+ 0.176 7933	— 3207	+ 0.176 4726	+ 1.252 030	— 0.019 033
— 11/16	— 0.007 4525	— 3807	— 0.007 8332	+ 0.161 0874	— 3324	+ 0.160 7550	+ 1.252 000	— 0.018 460
— 10/16	— 0.007 4864	— 3912	— 0.007 8776	+ 0.145 3380	— 3444	+ 0.144 9936	+ 1.251 971	— 0.017 929
— 9/16	— 0.007 5173	— 4015	— 0.007 9188	+ 0.129 5329	— 3567	+ 0.129 1762	+ 1.251 943	— 0.017 455
— 8/16	— 0.007 5445	— 4116	— 0.007 9561	+ 0.113 6592	— 3694	+ 0.113 2898	+ 1.251 918	— 0.017 049
— 7/16	— 0.007 5654	— 4214	— 0.007 9868	+ 0.097 6952	— 3827	+ 0.097 3125	+ 1.251 898	— 0.016 734
— 13/32	— 0.007 5729	— 4260	— 0.007 9989	+ 0.089 6704	— 3897	+ 0.089 2807	+ 1.251 892	— 0.016 620
— 12/32	— 0.007 5770	— 4305	— 0.008 0075	+ 0.081 6100	— 3969	+ 0.081 2131	+ 1.251 888	— 0.016 542
— 11/32	— 0.007 5772	— 4347	— 0.008 0119	+ 0.073 5065	— 4045	+ 0.073 1020	+ 1.251 888	— 0.016 507
— 10/32	— 0.007 5719	— 4385	— 0.008 0104	+ 0.065 3496	— 4126	+ 0.064 9370	+ 1.251 893	— 0.016 526
— 9/32	— 0.007 5588	— 4417	— 0.008 0005	+ 0.057 1264	— 4213	+ 0.056 7051	+ 1.251 905	— 0.016 612
— 8/32	— 0.007 5341	— 4439	— 0.007 9780	+ 0.048 8171	— 4311	+ 0.048 3860	+ 1.251 931	— 0.016 784
— 7/32	— 0.007 4906	— 4447	— 0.007 9353	+ 0.040 3867	— 4424	+ 0.039 9443	+ 1.251 977	— 0.017 080
— 6/32	— 0.007 4147	— 4426	— 0.007 8573	+ 0.031 7854	— 4564	+ 0.031 3290	+ 1.252 057	— 0.017 549
— 5/32	— 0.007 2727	— 4341	— 0.007 7068	+ 0.022 9110	— 4750	+ 0.022 4360	+ 1.252 209	— 0.018 296

Auf der Tafel am Schlusse der Arbeit entspricht dieser Ephemeride dasjenige Stück der Bahn PP', in welchem die Abbiegung von der ursprünglichen Kreisbahn stattfindet. Figur 4 stellt die Bahn des Planeten um den 2ten Hauptkörper dar. Dort wird durch obige Ephemeride das fast geradlinige Stück von P bis in unmittelbarste Nähe des 2ten Hauptkörpers I bestimmt.

Durch fortschreitende Verengerung der Intervalle wurde das übermässige Anwachsen der Differenzreihen in den störenden Kräften nach Möglichkeit verhindert. Die letzte Intervallweite von $\frac{3}{4}$ Stunde genügte bei $-\frac{5^{\text{d}}}{32}$ nicht mehr. Ich hätte also von da ab als Intervall $\frac{1^{\text{d}}}{64}$ nehmen müssen.

Da jedoch die Berechnung von Ephemeriden für eine derartige Hyperbelbewegung, besonders in unmittelbarster Nähe des Perihels, unbequem ist, und die Störungen an sich gar nicht besonders gross sind, so würde hier zur Berechnung von verhältnissmässig kleinen Grössen ein ganz ausserordentlicher Arbeitsaufwand erforderlich werden. Die Schuld hieran tragen die indirecten Glieder, welche bei rasch abnehmendem ρ sehr schnell wachsen. In dem Vorhandensein dieser Glieder glaube ich einen Nachteil für die Anwendung der Encke'schen Methode auf derartige Fälle des 3 Körperproblems erblicken zu dürfen, und bin überzeugt, dass man mit der Variation der Constanten leichter über eine derartige Stelle grosser Annäherung an den Centralkörper hinwegkommt, weil dort wenigstens nicht explicite Glieder von der Ordnung: (Störung): ρ^3 in den Differentialquotienten auftreten.

Bei Anwendung der Encke'schen Methode muss man in solchen Fällen eine Osculation rechnen.

§ 11. *Die zweite Osculation bezüglich des* 2ten *Hauptkörpers bei* $-0^d.25$.

Wählt man als Osculationsepoche für das neu zu rechnende Elementensystem $-\frac{1^d}{4}$, so ergiebt sich:

$\xi_0 = -0.007\,534\,02$	$\eta_0 = +0.048\,815\,82$
$\delta\xi = -0.000\,443\,93$	$\delta\eta = -0.000\,431\,11$
$\xi = -0.007\,977\,95$	$\eta = +0.048\,384\,71$
$\frac{d\xi_0}{dt} = +0.001\,040\,39$	$\frac{d\eta_0}{dt} = -0.267\,625\,99$
$\frac{d\delta\xi}{dt} = -0.000\,052\,56$	$\frac{d\delta\eta}{dt} = -0.000\,333\,95$
$\frac{d\xi}{dt} = +0.000\,987\,83$	$\frac{d\eta}{dt} = -0.267\,959\,94$

wobei wegen der Kleinheit der Coordinaten noch die Zehntel der 7ten Decimale mitgenommen wurden.

Hieraus ergiebt sich:

$$\lg p = 8.169\,1194$$

$$\lg e = 0.299\,9296$$

$$\lg(-a) = 7.694\,9350$$

$$\omega = 209^\circ\,52'\,24''.812$$

$$\lg\left(\frac{1}{e\,\text{Mod.}}\right) = 0.062\,2861$$

$$\lg\frac{\text{Mod. } k}{(-a)^{\frac{3}{2}}} = 1.330\,9632.$$

Zeit des Periheldurchganges: $-0^{d}.0811172$

$$\lg\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = 0.2392958.$$

Die Geschwindigkeitscomponenten berechnen sich wie folgt:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\sin u\,[9.1510217] + 0.14068802$$

$$\frac{d\eta}{dt} = +\cos u\,[9.1510217] - 0.24492542.$$

Durch Vergleich mit dem Elementensystem, dessen Osculationsepoche bei $-4^{d}.0$ lag (§ 9), zeigt sich, dass die Elementenstörungen ziemlich beträchtlich sind.

Vorstehendes Elementensystem stellt die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten für $-\frac{1^{d}}{4}$ wie folgt dar:

$$\xi = -0.00797795 \qquad \eta = +0.04838471$$

$$\frac{d\xi}{dt} = +0.00098786 \qquad \frac{d\eta}{dt} = -0.26795999$$

was mit den oben gegebenen Werten sehr gut übereinstimmt.

Man kann, wie die später folgende Quadratur noch deutlicher zeigen wird, annehmen, dass obige Osculationselemente in der Nähe des 2ten Hauptkörpers die Bewegung des Planeten vollständig genau darstellen. Demnach beträgt daselbst die gegenseitige Neigung der beiden Hyperbelasymptoten: $60°\,10'.0$, also ca. $3°$ weniger wie oben (p. 24). Der Periheldurchgang findet in Folge der Störungen noch etwa 1^{m} eher statt. (Siehe ebendaselbst).

Die Periheldistanz beträgt jetzt: [7.69274] oder: 1.0577 Sonnenradien. Also ist der Planet in Folge der Sonnenstörungen wieder derartig vom 2ten Hauptkörper weggezogen worden, dass er sich jetzt weiter als 1 Sonnenradius von demselben entfernt hält.

Es wurde nun ähnlich wie oben die neu einsetzende Quadratur neben der alten für dieselben Epochen berechnet, wegen der Kleinheit der Coordinaten aber nur 6-stellig.

Man findet so:

Osculation $-4^d.0$.

Epoche	$-\frac{10^d}{32}$	$-\frac{9^d}{32}$	$-\frac{7^d}{32}$	$-\frac{6^d}{32}$	$-\frac{5^d}{32}$
ξ_0	− 0.007 5719	− 0.007 5588	− 0.007 4906	− 0.007 4147	− 0.007 2727
$\delta\xi$	− 4385	− 4417	− 4447	− 4426	− 4341
ξ	− 0.008 0104	− 0.008 0005	− 0.007 9353	− 0.007 8573	− 0.007 7068
η_0	+ 0.065 3496	+ 0.057 1264	+ 0.040 3867	+ 0.031 7854	+ 0.022 9110
$\delta\eta$	− 4126	− 4213	− 4424	− 4564	− 4750
η	+ 0.064 9370	+ 0.056.7051	+ 0.039 9443	+ 0.031 3290	+ 0.022 4360

Osculation $-0^d.25$.

ξ_0	− 0.008 0104	− 0.008 0005	− 0.007 9353	− 0.007 8573	− 0.007 7069
$\delta\xi$	0	0	0	0	0
ξ	− 0.008 0104	− 0.008 0005	− 0.007 9353	− 0.007 8573	− 0.007 7069
η_0	+ 0.064 9373	+ 0.056 7051	+ 0.039 9441	+ 0.031 3291	+ 0.022 4361
$\delta\eta$	0	0	0	0	0
η	+ 0.064 9373	+ 0.056 7051	+ 0.039 9441	+ 0.031 3291	+ 0.022 4361

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung der sich aus beiden Elementensystemen ergebenden Werte von ξ und η sehr befriedigend.

§ 12. *Die Bewegung des Planeten um den 2ten Hauptkörper von* $-\frac{10^d}{32}$ *bis* $+6^d.5$.

Die indirecten Glieder der nun folgenden Quadratur wurden durchgängig mit der *f* Tafel 5-stellig gerechnet, das übrige bis inclusive $-4^d.75$

5-stellig, dann 6-stellig. Die Ephemeride beruht wie früher auf 6-stelliger Rechnung. Bei dieser Quadratur gilt die schon früher gemachte Bemerkung über die Kleinheit der indirecten Glieder in erhöhtem Grade. Sie betragen hier im Maximum $\frac{1}{1000}$ der directen; bei der Quadratur von $-4^{d}.5$ bis $-\frac{5}{32}^{d}$ ist dies nicht der Fall, vielmehr wachsen dort die indirecten Glieder bald derartig an, dass sie die directen weitaus an Grösse übertreffen. Daraus folgt, dass man bei einer eventuellen analytischen Behandlung derartiger Störungsvorgänge die Osculationsepoche am besten in unmittelbare Nähe des Periheldurchgangs legt.

Die Bahn des Planeten um den 2ten Hauptkörper von $-\frac{10^{d}}{32}$ bis $+6^{d}.5$.

Epoche	ξ_0	$\partial\xi$ in Einheiten der 7ten Decimale	ξ	η_0	$\partial\eta$ in Einheiten der 7ten Decimale	η	x	y
$-\frac{10^{d}}{32}$	− 0.008 0104	0	− 0.008 0104	+ 0.064 9373	0	+ 0.064 9373	+ 1.251 893	− 0.016 526
$-\frac{9}{32}$	− 0.008 0005	0	− 0.008 0005	+ 0.056 7051	0	+ 0.056 7051	+ 1.251 905	− 0.016 612
$-\frac{8}{32}$	− 0.007 9780	0	− 0.007 9780	+ 0.048 3847	0	+ 0.048 3847	+ 1.251 931	− 0.016 785
$-\frac{7}{32}$	− 0.007 9353	0	− 0.007 9353	+ 0.039 9441	0	+ 0.039 9441	+ 1.251 977	− 0.017 080
$-\frac{6}{32}$	− 0.007 8573	0	− 0.007 8573	+ 0.031 3291	0	+ 0.031 3291	+ 1.252 057	− 0.017 549
$-\frac{5}{32}$	− 0.007 7069	0	− 0.007 7069	+ 0.022 4361	0	+ 0.022 4361	+ 1.252 209	− 0.018 296
$-\frac{4}{32}$	− 0.007 3651	0	− 0.007 3651	+ 0.013 0260	0	+ 0.013 0260	+ 1.252 553	− 0.019 559
$-\frac{3}{32}$	− 0.006 1067	0	− 0.006 1067	+ 0.002 3670	− 1	+ 0.002 3669	+ 1.253 812	− 0.022 072
$-\frac{2}{32}$	+ 0.000 6548	0	+ 0.000 6548	− 0.007 9587	0	− 0.007 9587	+ 1.260 575	− 0.024 252
$-\frac{1}{32}$	+ 0.009 1037	0	+ 0.009 1037	− 0.013 9446	0	− 0.013 9446	+ 1.269 025	− 0.022 092

Epoche	ξ_0	$\delta\xi$ in Einheiten der 7ten Decimale	ξ	η_0	$\delta\eta$ in Einheiten der 7ten Decimale	η	x	y
0d	+ 0.016 9751	0	+ 0.016 9751	— 0.018 8664	0	— 0.018 8664	+ 1.276 896	— 0.018 866
+ 1/16	+ 0.031 9072	+ 1	+ 0.031 9073	— 0.027 8081	+ 1	— 0.027 8080	+ 1.291 827	— 0.011 515
+ 2/16	+ 0.045 6769	+ 2	+ 0.045 6771	— 0.036 2795	+ 1	— 0.036 2794	+ 1.305 595	— 0.003 694
+ 3/16	+ 0.060 4551	+ 4	+ 0.060 4555	— 0.044 5350	+ 2	— 0.044 5348	+ 1.320 370	+ 0.004 343
+ 4/16	+ 0.074 4235	+ 6	+ 0.074 4241	— 0.052 6649	+ 3	— 0.052 6646	+ 1.334 333	+ 0.012 505
+ 3/8	+ 0.102 0470	+ 13	+ 0.102 0483	— 0.068 7043	+ 6	— 0.068 7037	+ 1.361 944	+ 0.029 051
+ 4/8	+ 0.129 4082	+ 24	+ 0.129 4106	— 0.084 5668	+ 11	— 0.084 5657	+ 1.389 285	+ 0.045 773
+ 3/4	+ 0.183 6867	+ 60	+ 0.183 6927	— 0.116 0014	+ 27	— 0.115 9987	+ 1.443 510	+ 0.079 507
+ 1	+ 0.237 618	+ 120	+ 0.237 630	— 0.147 216	+ 56	— 0.147 210	+ 1.497 367	+ 0.113 459
+ 1.25	+ 0.291 347	+ 208	+ 0.291 368	— 0.178 305	+ 101	— 0.178 295	+ 1.551 002	+ 0.147 533
+ 1.5	+ 0.344 938	+ 326	+ 0.344 971	— 0.209 310	+ 166	— 0.209 293	+ 1.604 482	+ 0.181 689
+ 1.75	+ 0.398 425	+ 475	+ 0.398 473	— 0.240 252	+ 255	— 0.240 226	+ 1.657 841	+ 0.215 903
+ 2	+ 0.451 841	+ 656	+ 0.451 907	— 0.271 150	+ 369	— 0.271 113	+ 1.711 112	+ 0.250 156
+ 2.25	+ 0.505 201	+ 867	+ 0.505 288	— 0.302 013	+ 513	— 0.301 962	+ 1.764 311	+ 0.284 439
+ 2.5	+ 0.558 514	+ 1107	+ 0.558 625	— 0.332 850	+ 688	— 0.332 781	+ 1.817 450	+ 0.318 744
+ 2.75	+ 0.611 790	+ 1376	+ 0.611 928	— 0.363 665	+ 896	— 0.363 575	+ 1.870 538	+ 0.353 066
+ 3	+ 0.665 034	+ 1672	+ 0.665 201	— 0.394 463	+ 1138	— 0.394 349	+ 1.923 580	+ 0.387 399
+ 3.25	+ 0.718 247	+ 1992	+ 0.718 446	— 0.425 240	+ 1414	— 0.425 099	+ 1.976 580	+ 0.421 748
+ 3.5	+ 0.771 443	+ 2334	+ 0.771 676	— 0.456 009	+ 1726	— 0.455 836	+ 2.029 552	+ 0.456 100
+ 3.75	+ 0.824 620	+ 2697	+ 0.824 890	— 0.486 763	+ 2074	— 0.486 556	+ 2.082 496	+ 0.490 460
+ 4	+ 0.877 778	+ 3078	+ 0.878 086	— 0.517 509	+ 2457	— 0.517 263	+ 2.135 410	+ 0.524 824
+ 4.25	+ 0.930 918	+ 3476	+ 0.931 266	— 0.548 239	+ 2875	— 0.547 951	+ 2.188 297	+ 0.559 199
+ 4.5	+ 0.984 048	+ 3887	+ 0.984 437	— 0.578 970	+ 3327	— 0.578 637	+ 2.241 166	+ 0.593 567
+ 4.75	+ 1.037 162	+ 4312	+ 1.037 593	— 0.609 687	+ 3813	— 0.609 306	+ 2.294 010	+ 0.627 943
+ 5	+ 1.090 268	+ 4747	+ 1.090 743	— 0.640 403	+ 4332	— 0.639 970	+ 2.346 840	+ 0.662 316
+ 5.5	+ 1.196 443	+ 5644	+ 1.197 007	— 0.701 810	+ 5466	— 0.701 263	+ 2.452 440	+ 0.731 072
+ 6	+ 1.302 591	+ 6567	+ 1.303 248	— 0.763 200	+ 6721	— 0.762 528	+ 2.557 991	+ 0.799 827
+ 6.5	+ 1.408 713	+ 7507	+ 1.409 464	— 0.824 578	+ 8088	— 0.823 769	+ 2.663 494	+ 0.868 576

Diesem Teile der Rechnung entspricht auf Fig. 4 das fast geradlinige Stück der Bahn um den 2ten Hauptkörper etwa von (I) bis P'. Auch die Bewegung um die Sonne erscheint auf der Tafel (etwa von Q bis P') fast als geradlinig. Um jedoch die eigentümliche Bewegung, welche der Planet um die Sonne ausführt, wenn er sich in unmittelbarster Nähe des 2ten Hauptkörpers befindet, deutlicher sichtbar zu machen, gebe ich den entsprechenden Teil der Tafel hier vergrössert (1 Erdbahnradius = 5 Meter) wieder. Wie dort bedeutet AA' die Bahn des 2ten Hauptkörpers bezüglich der Sonne und PP' die des Planeten; die Zahlen geben die den Punkten der Bahnen entsprechenden Zeiten (vergl. p. 7).

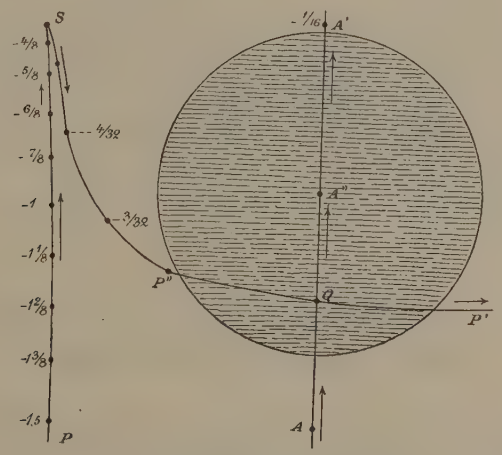


Fig. 3. Die Bewegung des Planeten gegen die *Sonne* zur Zeit der grossen Annäherung an den 2ten Hauptkörper.

Wie man sieht, bewegt sich der Planet zunächst in seiner ursprünglichen Bewegungsrichtung von P nach S mit immer abnehmender Geschwindigkeit. In S kehrt er um und geht im Bogen zur Bahn des 2ten Hauptkörpers hinüber, die er in Q durchschneidet. Diesen Punkt erreicht zuerst der 2te Hauptkörper und dann der Planet.

A'' und P'' sind die Lagen des 2ten Hauptkörpers und des Planeten zur Zeit ihrer grössten gegenseitigen Annäherung. Um die Grössenverhältnisse der Figur noch besser ersichtlich zu machen, wurde um A'' ein

Kreis mit dem Radius der Sonne gezeichnet. Hätte also der eindringende Stern die Dichte der Sonne, so würde er den schraffierten Teil der Figur bedecken, wenn sich der Planet in P'' befindet.

§ 13. *Das Hauptresultat der mechanischen Quadratur.*

Man braucht die Rechnung nicht weiter zu führen, um das Hauptresultat vorauszusehen: **Der Planet geht in einer fast geradlinigen Bahn von der Sonne weg ins Unendliche hinaus.** Die beiden Hyperbeln nämlich, welche der Planet um den 2ten Hauptkörper, und dieser um die Sonne beschreiben, verwandeln sich mehr und mehr in gerade Linien. In Folge dessen entfernt sich der Planet immer weiter von der Sonne, und zwar mit einer Geschwindigkeit, bei der eine Rückkehr selbst auf langgestreckter, elliptischer Bahn ausgeschlossen ist. Im vorliegenden Falle wird also der Planet in Folge der grossen Störungen durch den 2ten Hauptkörper dem Sonnensysteme dauernd entrissen.

§ 14. *Näherungsweise Darstellung ähnlicher Bewegungsvorgänge durch Kepler'sche Bewegungen.*

Für einen Fall des Problems haben wir nun die Bewegung des Planeten durch obige mechanische Quadratur sehr genau dargestellt. Auch andere Fälle desselben auf diesem Wege zu behandeln würde jedoch sehr zeitraubend sein. Daher wurde zu einem Näherungsverfahren gegriffen.

Aus den obigen Ephemeriden (§ 7, 10 und 12) geht hervor, dass die Störungen (bezüglich des jeweiligen Centralkörpers) in den verchiedenen Teilen der Bahn verhältnissmässig kleine sind. Man kann also näherungsweise die wirkliche Bewegung durch KEPLER'sche ersetzen.

Es handelt sich nun noch darum, den Zeitpunkt festzustellen, wann man am geeignetsten den Übergang von einem Centralkörper auf den andern ausführt.

Wenn 2 Körper mit den Massen M (Sonne) und m_1 (2ter Hauptkörper) gegeben sind, so giebt es zwischen ihnen eine Grenzfläche, welche

geometrisch angiebt, ob es vorteilhafter ist, die Bewegung eines Objectes auf den einen oder anderen zu beziehen. Die durch diese abgegrenzten Bereiche will ich die *Wirkungsbereiche* der beiden Körper nennen (entsprechend dem LAPLACE'schen Ausdruck: sphère d'activité). LAPLACE hat bei Behandlung eines Specialfalles dieses Problems[1] angenommen, dass das Verhältniss: *Störende Kraft* (incl. Reactionsglieder) *zu Centralkraft ein Mass für die Grösse der Störung einer Bewegung giebt.*

Demnach hätte man dieses Verhältniss 2 mal zu bilden, indem man erst die Sonne und dann den 2ten Hauptkörper als Centralkörper betrachtet. Durch Gleichsetzung beider Werte würde man die Gleichung der Grenzfläche der Wirkungsbereiche erhalten. Es ist indessen sehr zweifelhaft, ob dieser Ansatz in allen Fällen das beste Resultat liefert.

Für unseren Fall, in dem die Massen der beiden Centralkörper gleich sind, ergiebt sich unzweifelhaft als Grenzfläche der Wirkungsbereiche eine Ebene, deren Punkte von den beiden Massen gleich weit entfernt sind, ganz unabhängig von der LAPLACE'schen Annahme. Denn man erhält analytisch dieselbe Abgrenzung, wenn man als Maass der Störung den Quotienten: *Störende Kraft durch eine beliebige Potenz der Centralkraft* einführt. Bei völliger Symmetrie ist kein Körper vor dem andern bevorzugt. Man geht also von einem Centralkörper auf den andern dann über, wenn die Abstände des Planeten von beiden gleich sind.

§ 15. *Über die bei Vernachlässigung der Störungen erreichte Genauigkeit.*

Es fragt sich nun, wie genau man ähnliche Bewegungsvorgänge durch KEPLER'sche Bewegungen darstellen kann. Um dies zu entscheiden, gehe ich von dem oben strenge gerechneten Beispiele aus.

Wenn man annimmt, dass sich der oben (§ 5) definierte Planet ohne Störungen zu erleiden in seiner Kreisbahn um die Sonne bewegt, so steht er zwischen $-5^d.25$ und $-5^d.0$ von beiden Hauptkörpern gleichweit ab. Man könnte diesen Augenblick noch genauer feststellen,

[1] LAPLACE, *Mécanique Céleste,* Tome IV, p. 218.

und für ihn den Übergang auf den 2ten Hauptkörper rechnen. Es ist aber für das folgende von Wichtigkeit, zu zeigen, dass man die Zeit des Überganges um $0^d.25$ verschieben kann, ohne dadurch das Resultat wesentlich zu schädigen.

Rechnet man daher für $-5^d.25$ und $-5^d.0$ von der ursprünglichen Kreisbahn ausgehend den Übergang auf den 2ten Hauptkörper, so ergeben sich bezüglich des letztern folgende Osculationselementensysteme (5-stellige Rechnung):

Elemente	(1)	(2)
Übergangszeit	$-5^d.25$	$-5^d.0$
$\lg p$	7.68 816	7.70 222
$\lg e$	0.14 832	0.15 182
$\lg(-a)$	7.69 699	7.69 702
ω	$+225^\circ 12'.59$	$+224^\circ 44'.64$
$\lg\left(\frac{1}{e \text{ Mod.}}\right)$	0.21 390	0.21 040
$\lg\frac{\text{Mod. } k}{(-a)^{\frac{3}{2}}}$	1.327 88	1.327 84
Periheldurchgang	$-0^d.0733$	$-0^d.0740$
$\lg\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}$	0.385 89	0.380 94

Wenn man diese Elementensysteme mit den in § 9 und § 11 gegebenen vergleicht, so sind in einzelnen Elementen z. T. starke Abweichungen zu erkennen; man sieht ferner, dass die Verschiedenheit der beiden Übergangszeiten um $0^d.25$ gegenüber den sonstigen Fehlern völlig zurücktritt.

Die Ungenauigkeit dieser Darstellung der wirklichen Bewegung durch KEPLER'sche ist naturgemäss durch 2 Ursachen bedingt:

1) Durch die Störungen, welche der Planet durch den 2ten Hauptkörper in seiner ursprünglichen Kreisbahn um die Sonne erleidet.

2) Durch die Sonnenstörungen in seiner hyperbolischen Bahn um den 2ten Hauptkörper.

Um den Einfluss dieser beiden Fehlerquellen getrennt überblicken zu können, ziehen wir zum Vergleiche das in § 9 gegebene Elementensystem heran, dessen Osculationsepoche bei $-4^d.0$ liegt, welches also die Störungen des Planeten durch den 2ten Hauptkörper bis -4^d bereits in sich schliesst.

Wenn man also annimmt, dass sich der Planet in diesem letzteren Elementensystem um den 2ten Hauptkörper bewegt, so ist die Abweichung von der wirklichen Bewegung nur noch durch die Sonnenstörungen bedingt.

Um nun zu sehen, in wie weit diese verschiedenen Annahmen der Wirklichkeit entsprechen, rechnete ich die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des Planeten bezüglich des 2ten Hauptkörpers $\left(\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt} \text{ und } \frac{d\eta}{dt}\right)$ und der Sonne $\left(x, y, \frac{dx}{dt} \text{ und } \frac{dy}{dt}\right)$ für $+ 5^d.75$.

Wir sahen in § 13, dass zu dieser Zeit letztere Grössen darüber entscheiden, ob der Planet dem Sonnensysteme erhalten bleibt. Darum füge ich der folgenden Übersicht noch die osculierende grosse Halbachse des Planeten bezüglich der Sonne (a) bei, welche sich nach der Formel:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]$$

berechnet, worin

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

zu setzen ist.

	Elemente (1)	Elemente (2)	Elemente § 9	Mechanische Quadratur § 12
ξ	+ 1.44 450	+ 1.44 490	+ 1.28 750	+ 1.250 13
η	+ 0.00 769	— 0.01 577	— 0.66 120	— 0.731 90
$\frac{d\xi}{dt}$	+ 0.244 660	+ 0.244 645	+ 0.218 608	+ 0.212 482
$\frac{d\eta}{dt}$	+ 0.002 139	— 0.001 828	— 0.110 737	— 0.122 530
x	+ 2.69 959	+ 2.69 999	+ 2.54 259	+ 2.505 22
y	+ 1.50 504	+ 1.48 158	+ 0.83 615	+ 0.765 45
$\frac{dx}{dt}$	+ 0.243 279	+ 0.243 264	+ 0.217 227	+ 0.211 102
$\frac{dy}{dt}$	+ 0.262 176	+ 0.258 209	+ 0.149 301	+ 0.137 510
a	— 0.00 232	— 0.00 235	— 0.00 427	— 0.00 468

Man sieht, dass die Elemente des § 9 die wirkliche, durch die mechanische Quadratur gegebene Bewegung, näherungsweise darstellen. Aber die Elemente (1) und (2) geben nur noch ein Bild derselben; indessen entspricht das Vorzeichen und die Grössenordnung von a der Wirklichkeit.

Im vorhergehenden gingen wir von der ursprünglichen Kreisbahn des Planeten um die Sonne aus, um die wirkliche Bewegung näherungsweise durch KEPLER'sche darzustellen. Man kann aber ebensogut das Elementensystem, welches der Planet bei $-0^d.25$ bezüglich des 2ten Hauptkörpers hat (vergl. § 11), als Ausgangspunkt wählen, und von diesem Zeitpunkte ab die Bewegung nach vorwärts und rückwärts verfolgen.

Wir sahen oben (§ 12), dass die Sonnenstörungen in beiden Coordinatenrichtungen bis $+6^d.5$ noch nicht 0.001 Erdbahnradien erreichen. Hingegen sind für die Zeiten vor $-0^d.25$ grössere Abweichungen zu erwarten. Daher rechnete ich von den Elementen des § 11 ausgehend zwei Osculationselementensysteme bezüglich der Sonne, und zwar wurde

als Zeit des Überganges einmal $-5^d.0$ und ein anderes Mal $-5^d.25$ festgesetzt. Unter beiden Annahmen ergiebt sich Folgendes (6 stellige Rechnung):

Elemente	(3)	(4)
Übergangszeit	$-5^d.0$	$-5^d.25$
$\lg p$	0.062 518	0.063 490
ω	$-205°\,34'\,7''.81$	$-206°\,49'\,19''.99$
$\lg e$	8.932 864	8.925 381
e	$4°\,54'\,32''.15$	$4°\,49'\,30''.27$
$\lg a$	0.065 718	0.066 581
$M(t=0)$	$209°\,51'\,29''.88$	$211°\,14'\,1''.26$
$\lg e''$	4.247 289	4.239 806
$\lg n''$	3.451 430	3.450 135
n	$47'\,7''.68$	$46'\,59''.26$
$\lg\sqrt{a(1+e)}$	0.050 709	0.050 847
$\lg\sqrt{a(1-e)}$	0.013 409	0.014 188

Zunächst erweist sich durch Vergleich dieser Grössen mit den entsprechenden in § 5 gegebenen die Verschiedenheit der Übergangszeiten um $0^d.25$ wiederum als belanglos.

Die folgende Zusammenstellung giebt für gewisse Epochen die rechtwinkligen Coordinaten x und y des Planeten bezüglich der Sonne nach den Elementensystemen (3) und (4) und die wirklichen Werte dieser Grössen nach § 7.

Epoche		-45^d	-35^d	-25^d	-15^d	-10^d	-5^d
Elemente (3):	x	+1.0913	+1.1577	+1.2070	+1.2387	+1.2478	+1.2521
	y	−0.6353	−0.5050	−0.3672	−0.2241	−0.1512	−0.0777
Elemente (4):	x	+1.0919	+1.1581	+1.2074	+1.2389	+1.2478	+1.2521
	y	−0.6360	−0.5055	−0.3676	−0.2243	−0.1513	−0.0777
Wirkliche Werte:	x	+1.0698	+1.1419	+1.1970	+1.2339	+1.2453	+1.2516
	y	−0.6565	−0.5211	−0.3780	−0.2293	−0.1537	−0.0782

Bis -45^d stellen also die Elemente (3) und (4) die wirkliche Bewegung auf wenige hundertstel Erdbahnradien genau dar.

Man schliesst aus obigem allgemein:

1) *Von der ursprünglichen Kreisbahn um die Sonne ausgehend erhält man einen Näherungswert für die schliessliche, grosse Bahnhalbachse a des Planeten bezüglich der Sonne.*

2) *Die wirkliche Bewegung lässt sich innerhalb weiter Bereiche durch Kepler'sche darstellen, von denen eine den Osculationselementen des Planeten bezüglich des Sterns zur Zeit des Periastrons entspricht.*

Da unser Beispiel so gewählt ist, dass möglichst grosse Störungen auftreten, so dürfte die Annäherung an die Wirklichkeit im allgemeinen eine weit grössere sein.

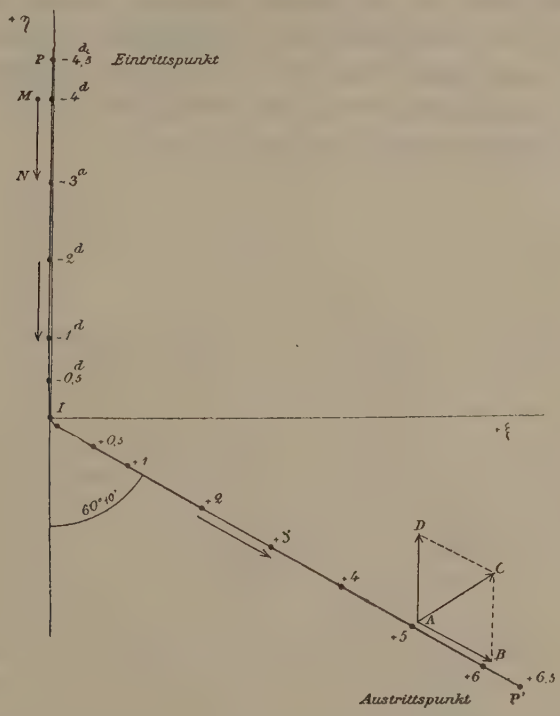
§ 16. *Über ein Kriterium der Stabilität.*

Der Satz 1) des vorigen Paragraphen gestattet uns in einfacher Weise ein Bild von der dynamischen Ursache zu gewinnen, welche den Weggang des Planeten aus dem Sonnensysteme bedingt.

Da es sich hier vorläufig nur um eine ganz allgemeine Betrachtung des Bewegungsvorganges handelt, so können wir der Einfachheit halber die Bahn des 2ten Hauptkörpers um die Sonne als eine Gerade betrachten,

welche der y-Achse parallel ist und mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen wird (vergl. p. 11). Figur 4 veranschaulicht die Bewegung des Planeten um den 2ten Hauptkörper.

Es sei (MN) die Geschwindigkeit, mit welcher der Planet in das Wirkungsbereich des 2ten Hauptkörpers eintritt, (AB) diejenige, mit welcher



Figur 4. Die Bahn des Planeten um den 2ten Hauptkörper (I).
(Die Zahlen geben die Zeit in Tagen vergl. p. 7.)

er austritt. Beide werden nahezu gleich gross sein, da in diesen Punkten die Bewegung fast auf den Hyperbelasymptoten stattfindet. Um nun die Geschwindigkeit des Planeten in A gegenüber der Sonne (AC) zu erhalten, muss man (AB) mit der Geschwindigkeit des 2ten Hauptkörpers gegen die Sonne (AD) zu einem Parallelogramm zusammensetzen. (AD) muss nahezu gleich und entgegengesetzt (MN) sein, weil die Bewegung

des Planeten gegen die Sonne eine verhältnissmässig langsame ist. Wäre nun die Neigung der beiden Asymptoten der Bahn um den 2ten Hauptkörper gegen einander gleich null, so würde (AB) an Grösse und Richtung nahe gleich (MN) sein und daher mit (AD) zusammen eine kleine Geschwindigkeit gegenüber der Sonne ergeben.

Der Planet wird also in unserem Falle dem Sonnensysteme deswegen entrissen, weil die Asymptoten seiner hyperbolischen Bahn um den 2ten Hauptkörper stark gegen einander geneigt sind. Allgemein giebt also die Neigung dieser Asymptoten ein Kriterium dafür, ob ein zu betrachtender Fall des Problems stabil oder instabil ist.

II. TEIL.

Untersuchungen über Grenzfälle der Stabilität.

Wir haben im ersten Teile der Arbeit einen Fall des Problems zunächst strenge und dann näherungsweise behandelt, in welchem ein Planet durch die Wirkung des eindringenden Fremdkörpers dem Sonnensysteme entrissen wird. In vielen Fällen tritt zwar eine starke Veränderung der ursprünglichen Bahn ein, doch bleibt der Planet Begleiter der Sonne.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Fälle, in welchen seine ursprüngliche Kreisbahn in eine Parabel verwandelt wird.

Ändert man die entsprechenden Anfangsbedingungen auch nur wenig nach der einen oder anderen Seite hin ab, so geht die ursprüngliche Kreisbahn in eine Hyperbel oder langgestreckte Ellipse über. Man kann daher diese Fälle *als Grenzfälle der Stabilität* bezeichnen.

Vorläufig steht uns zur Aufsuchung derselben kein anderes Hülfsmittel zur Verfügung, als die in § 15 besprochene Zusammensetzung von Kepler'schen Bewegungen. An der Hand des auf diese Weise gewonnenen Zahlenmaterials ergiebt sich aber ein analytisches Verfahren die Grenzfälle der Stabilität zu finden. Man erhält so ein übersichtliches Bild von den Veränderungen, welche in einem planetaren System durch die Einwirkung eines schnell vorübergehenden Sterns von der Masse des Centralkörpers hervorgerufen werden.

§ 17. *Behandlung verschiedener Fälle des Problems durch Zusammensetzung Kepler'schen Bewegungen.*

Um auf rechnerischem Wege in die Nähe von Grenzfällen der Stabilität zu kommen, betrachten wir 9 rechtläufige[1] Kreisbahnen mit verschiedenen Radien. *Die Planeten bewegen sich in der Bahnebene des* 2ten *Hauptkörpers.*

Nachfolgende Zusammenstellung giebt die Lagen der Planeten bei Eintritt in das Wirkungsbereich des Sterns, ihre Bahnelemente bezüglich des letzteren und ihre schliesslichen Elemente bezüglich der Sonne.

Planet	r Bahnradius[2]	Eintritt[3]	L heliocentrische Länge[4]	Elemente bezüglich des 2ten Hauptkörpers (vergl. § 8)			
				lg a	lg e	ω	Periastron[5]
1	0.72	$-1^d.75$	$+0°\ 7'.5$	$7.71\,600_n$	2.02 009	$+180°11'.7$	$+0^d.1597$
2	1.11	-4.5	$+0\ 0.0$	$7.70\,049_n$	1.48 523	$+181\ 34.2$	$+0.2876$
3	1.12	-4.5	$-3\ 44.5$	$7.70\,039_n$	1.44 757	$+181\ 59.3$	-0.0117
4	1.16	-4.75	$-3\ 44.8$	$7.69\,927_n$	1.30 284	$+182\ 12.5$	-0.0187
5	1.20	-5.0	$-3\ 44.9$	$7.69\,826_n$	1.08 329	$+184\ 40.0$	-0.0294
6	1.43	-5.5	$0\ 0.0$	$7.69\,336_n$	1.53 017	$-1\ 59.7$	$+0.3161$
7	1.44	-5.5	$0\ 0.0$	$7.69\,316_n$	1.55 565	$-1\ 53.9$	$+0.3165$
8	1.46	-5.5	$0\ 0.0$	$7.69\,281_n$	1.60 254	$-1\ 44.0$	$+0.3165$
9	1.47	-5.5	$0\ 0.0$	$7.69\,264_n$	1.62 423	$-1\ 39.8$	$+0.3168$

[1] Unter {rechtläufigen / rückläufigen} Bahnen verstehen wir im folgenden solche, in welchen die Bewegung im {gleichen / entgegengesetzten} Sinne stattfindet, wie in der Bahn des Sterns um die Sonne.

[2] Radius der ursprünglichen Kreisbahn um die Sonne.

[3] Zeit (vergl. p. 7) des Eintrittes in das Wirkungsbereich des 2ten Hauptkörpers (vergl. p. 37).

[4] L Heliocentrische Länge des Planeten beim Eintritte, bezogen auf das in § 3 definierte Coordinatensystem. Demnach ist für diesen Zeitpunkt: $x = r\cos L$, $y = r\sin L$, worin r den Radius der Kreisbahn bedeutet.

[5] Zeit der grössten Annäherung an den 2ten Hauptkörper.

Planet	Austritt[1]	Schliessliche Elemente bezüglich der Sonne (vergl. § 8)				
		lg a'	lg e	ω	Perihel-durchgang[2]	$\frac{1}{a'}$
1	+ 2^d.0	9.86 645	9.26 178	— 90° 56′.5	— 46^d.600	+ 1.360
2	+ 4.75	0.78 979	9.95 942	— 90 4.5	— 47.664	+ 0.162
3	+ 4.75	0.85 186$_n$	0.03 499	— 85 2.1	— 43.819	— 0.141
4	+ 5.25	9.93 069$_n$	0.21 166	— 83 29.4	— 36.374	— 1.173
5	+ 5.75	9.31 580$_n$	0.50 609	— 80 26.8	— 25.339	— 4.833
6	+ 5.5	0.61 588$_n$	0.07 420	+ 84° 10′.1	+ 60.131	— 0.242
7	+ 5.5	0.81 203$_n$	0.04 985	+ 84 23.0	+ 62.644	— 0.154
8	+ 5.5	1.75 984$_n$	0.00 620	+ 84 41.6	+ 67.401	— 0.017
9	+ 5.5	1.44 185	9.98 652	+ 84 51.1	+ 69.926	+ 0.036

Die Bewegungen der Planeten 6 bis 9 um den Stern sind rückläufig (vergl. p. 46 Anm. 1), alle übrigen Bewegungen erfolgen im rechtläufigen Sinne.

Die Bahn des Planeten (1), welche weit innerhalb der des 2ten Hauptkörpers[3] verläuft, wird nur wenig verändert. Der Planet (2), welcher dem Sterne näher kommt, bleibt noch dem Sonnensysteme erhalten. Seine Umlaufszeit, die ursprünglich ca. 427^d betrug, ist nach Ablauf der grossen Störungen durch den 2ten Hauptkörper ca. 5588^d. Seine Bahn hat sich also in eine langgestreckte Ellipse verwandelt, deren Excentricität nach obigem ca. 0.91 ist. Im $\left\{\begin{matrix}\text{Perihel}\\ \text{Aphel}\end{matrix}\right\}$ beträgt sein Abstand von der Sonne $\left\{\begin{matrix}0.55\\ 11.78\end{matrix}\right\}$ Erdbahnradien, während der Radius der ursprünglichen Kreisbahn 1.11 war.

---

[1] Zeit des Austrittes aus dem Wirkungsbereiche des 2ten Hauptkörpers, d. h. Rückkehr zur Sonne.

[2] Zeit der grössten Annäherung an die Sonne. Für die Planeten 1—5 ist diese Grösse negativ. In das Wirkungsbereich der Sonne zurückgekehrt, entfernen sie sich von derselben. Man muss sich also vorstellen, dass der Periheldurchgang vorher stattgefunden hat.

[3] Der Perihelabstand des 2ten Hauptkörpers beträgt nach p. 2 ca. 1.26 Erdbahnradien.

Der Planet (3), welcher sich der Bahn des 2ten Hauptkörpers noch mehr nähert, wird dem Sonnensysteme dauernd entrissen, ebenso (4) und (5).

Dasselbe gilt von den Planeten (6), (7) und (8) welche von aussen der Bahn des Sterns nahe kommen.

Der Planet (9) hingegen, welcher noch etwas weiter von der Bahn des 2ten Hauptkörpers absteht, bleibt dem Sonnensysteme in langgestreckter elliptischer Bahn erhalten. Seine Umlaufszeit betrug ursprünglich 651^d; in der schliesslichen Bahn um die Sonne ist sie: 53135^d.

Im $\left\{\begin{matrix}\text{Perihel}\\ \text{Aphel}\end{matrix}\right\}$ ist sein Abstand von der Sonne: $\left\{\begin{matrix}0.85\\ 54.47\end{matrix}\right\}$ Erdbahnradien, während der Radius der ursprünglichen Kreisbahn 1.47 war.

Demnach liegen die Bahnen (2) sind (3) einerseits, (8) und (9) andererseits in der Nähe von Grenzfällen der Stabilität.

Aus diesen Beispielen sehen wir, dass durch die Einwirkung des Sterns ursprünglich kreisförmige Bahnen in langgestreckte Ellipsen verwandelt werden können.

Man kann also umgekehrt das Vorhandensein langgestreckter elliptischer Bahnen dadurch erklären, dass in früherer Zeit ein Stern das Planetensystem auf seinem intrastellaren Wege durcheilte.

Auf der Tafel am Schlusse der Arbeit stellen die Curven (1) — (1′), (2) — (2′) u. s. w. die Bahnen der 9 Planeten um die Sonne dar. Nach § 15 (Satz 2) entsprechen diese Curven am nächsten denjenigen Bewegungen, welche mit ihnen zur Zeit der grössten Annäherung an den 2ten Hauptkörper zusammenfallen.

§ 18. *Über die grosse Achse der Bahnen um den Stern.*

Alle im vorigen Paragraphen betrachteten Planeten beschreiben um den 2ten Hauptkörper Hyperbeln. Um diese Erscheinung zu erklären, betrachten wir die Formel (1) p. 21:

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{a} = \frac{2}{\rho} - \frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right]$$

durch welche a (die grosse Halbachse der Bahn um den Stern) beim Eintritte des Planeten bestimmt wird.

Da es sich hier nur um eine ganz allgemeine Betrachtung handelt, so können wir die heliocentrischen Geschwindigkeiten der Planeten gegenüber der des Sterns vernachlässigen.

Unter dieser Annahme ergiebt sich (vergl. p. 20):

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{dx_1}{dt}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dy_1}{dt},$$

also:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2$$

d. h. dieser Ausdruck wird gleich dem Quadrate der heliocentrischen Geschwindigkeit des Sterns. Diese ist nun nach p. 2 fast constant; wir wollen sie gleich $c_1 = 0.26\,068\,[9.41\,611]$ setzen, d. h. gleich ihrem Werte im Perihel.

Dann geht (A) in folgende Gleichung über:

$$\text{(A')} \qquad \frac{1}{a} = \frac{2}{\rho} - \frac{c_1^2}{k^2}.$$

Das zweite (negative) Glied der rechten Seite ist sehr gross ρ aber kann nicht unter eine gewisse Grenze herabsinken. Da sich nämlich (A) und (A') auf den *Eintrittspunkt* in das Wirkungsbereich des Sterns beziehen, so ist der denkbar kleinste Wert von ρ gleich der Hälfte des entsprechenden Abstandes der beiden Hauptkörper (vergl. p. 37). Der Stern nähert sich der Sonne in seinem Perihel bis zum Abstande q_1 (Siehe p. 1). Demnach ist der kleinste Wert, den ρ unter den günstigsten Verhältnissen erreichen kann: $\frac{q_1}{2}$.

Setzt man diesen in (A') ein, so folgt:

$$\text{(A'')} \qquad \frac{1}{a} = \frac{4}{q_1} - \frac{c_1^2}{k^2}.$$

Unter Benutzung der in § 1 gegebenen Zahlenwerte ergiebt sich nun:

$$\frac{4}{q_1} = 3.2, \qquad \frac{c_1^2}{k^2} = 229.6.$$

Das zweite (negative) Glied auf der rechten Seite von (A'') überwiegt also bedeutend den grössten Wert, welchen das erste (positive) erreichen kann. Bei der von uns gewählten Bahn des 2ten Hauptkörpers beschreiben also die Planeten immer Hyperbeln um denselben, deren grosse Halbachse a nahezu gleich $-\frac{k^2}{c_1^2} = [7.64_n]$ ist. (Vergl. die Werte für die 9 Planeten p. 46.)

Dieser Satz bleibt noch bestehen, wenn man c_1 und q_1 wesentlich ändert, und der Planet sich nicht in der Bahnebene des Sterns bewegt.

Solange also die Geschwindigkeit des Sterns wesentlich grösser ist, als die planetaren Geschwindigkeiten, schliesst man aus obigem:

Wenn ein Planet durch die Einwirkung des 2ten Hauptkörpers dem Sonnensysteme entrissen wird, so kann er im allgemeinen kein Begleiter des Sterns werden.

Wir können also im folgenden die Bahnen der Planeten um den 2ten Hauptkörper immer als Hyperbeln betrachten.

§ 19. *Einleitende Bemerkungen zur analytischen Behandlung des Problems.*

In § 17 wurden die Bewegungen verschiedener Planeten durch Zusammensetzung Kepler'scher Bewegungen *rechnerisch* behandelt. Dieses Verfahren erfordert jedoch einen ziemlich beträchtlichen Arbeitsaufwand und erlaubt nicht, die Hauptgesetze derartiger Vorgänge zu überblicken. Deshalb wollen wir diese Zusammensetzung *analytisch* durchführen und zwar, wie bisher, unter der Voraussetzung, dass sich die Planeten in der Bahnebene des Sterns bewegen.

Es seien der zu betrachtende Planet und der 2te Hauptkörper zu einer gewissen Zeit in gewissen Anfangslagen und mit gewissen Anfangsgeschwindigkeiten gegeben. Zur Aufsuchung der Grenzfälle der Stabilität ist erforderlich, die grosse Bahnhalbachse (a') des Planeten nach seiner Rückkehr zur Sonne als Function dieser Grössen darzustellen.

Analog der Gleichung (1) p. 21 ist:

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{a'} = \frac{2}{r'} - \frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2\right]$$

worin r' den heliocentrischen Radiusvector, $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ die heliocentrischen Geschwindigkeitscomponenten des Planeten bei seiner Rückkehr zur Sonne bedeuten. Diese letzteren Grössen müssen also als Functionen der Anfangscoordinaten und Anfangsgeschwindigkeiten dargestellt werden.

Wir gelangen im folgenden schrittweise zur Lösung dieser Aufgabe; die Beispiele des § 17 erlauben uns, die analytischen Resultate mit auf rechnerischem Wege erlangten zu vergleichen.

§ 20. *Darstellung von* $\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}$ *und* $\frac{d\eta}{dt}$ *durch* $x, y, \frac{dx}{dt}$ *und* $\frac{dy}{dt}$ *beim Eintritte in das Wirkungsbereich des Sterns.*

Als *Anfangslage* (P) des Planeten (Fig. 5) wählen wir seine Lage zur Zeit des Eintrittes in das Wirkungsbereich des 2ten Hauptkörpers (I). Also ist: $r = \rho$ (vergl. p. 37).

Wenn demnach die Anfangslage P des Planeten gegeben ist, so kann man sich daraus unmittelbar die entsprechende des 2ten *Hauptkörpers construieren.* Man schlägt um P einen Kreis mit dem Radius r. Der Ort des Sterns ist alsdann derjenige Schnittpunkt mit seiner Bahn $I''II''$, für welchen $y > y_1$ ist, da der Planet beim Eintritte in das Wirkungsbereich des 2ten Hauptkörpers von letzterem eingeholt wird.

Betrachtet man ferner die Bahn des 2ten Hauptkörpers als gerade Linie, welche der y-Achse im Abstande q_1 (vergl. Tafel) parallel ist, so kann man auch analytisch aus der Anfangslage des Planeten die des 2ten Hauptkörpers in einfacher Weise ableiten.

Aus Figur (5) ergiebt sich fast unmittelbar:

$$y_1 = y - \sqrt{r^2 - (q_1 - x)^2}$$

während x_1 nach unseren Annahmen immer gleich q_1 ist.

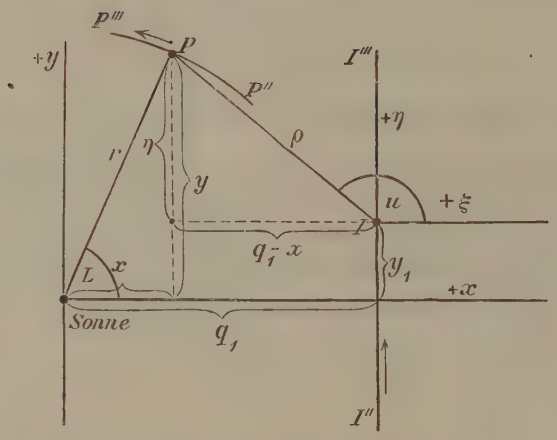


Fig. 5. Beziehungen zwischen den Anfangslagen des Planeten (P) und des 2ten Hauptkörpers (I).

Sind also x und y gegeben, so folgt (vergl. p. 20):

$$(1) \qquad \xi = x - q_1, \qquad \eta = \sqrt{r^2 - (q_1 - x)^2}.$$

Wir wollen ferner annehmen, dass der 2ten Hauptkörper seine Bahn mit der constanten Geschwindigkeit c_1 durchläuft (vergl. p. 49).

Dann bestehen die Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - c_1.$$

§ 21. *Darstellung von* $\frac{dx'}{dt}$ *und* $\frac{dy'}{dt}$ *mittels* Δ.

Durch die Gleichungen (1) und (2) des vorrigen Paragraphen findet man aus $x, y, \frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$: $\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$.

Mit Hülfe des in § 16 bereits geometrisch angewendeten Verfahrens können wir nun aus diesen Grössen: $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ (die heliocentrischen Geschwindigkeitscomponenten bei der Rückkehr zur Sonne) bestimmen.

Wir nehmen vorläufig den Winkel Δ zwischen den beiden Asymptoten der hyperbolischen Bahn um den 2ten Hauptkörper als bekannt an.

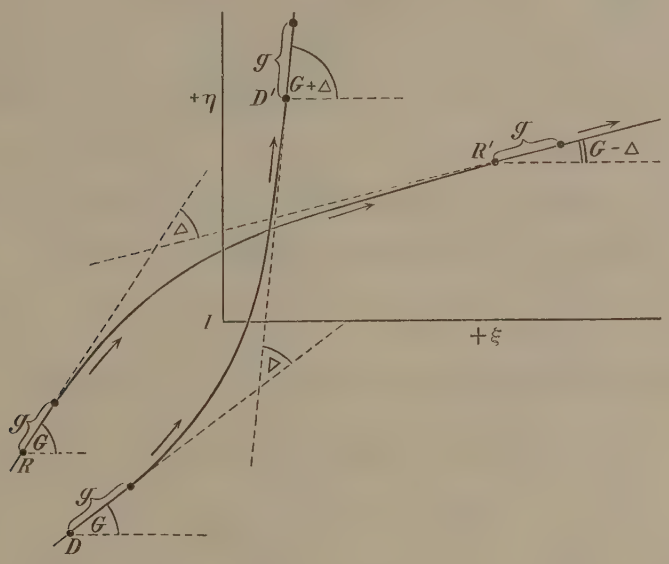


Fig. 6. Die Drehung der Bewegungsrichtung in Bahnen um den Stern (I).

Es seien (Siehe Fig. 6) DD' eine rechtläufige, RR' eine rückläufige Bahn (vergl. p. 46 Anm. 1.) um den 2ten Hauptkörper I, und zwar seien D und R die Eintrittspunkte, D' und R' die Austrittspunkte der Planeten bezüglich des Wirkungsbereichs des Sterns.

Für D resp. R seien: g die Geschwindigkeit des Planeten gegen den 2ten Hauptkörper ihrer absoluten Grösse nach, und G der Winkel zwischen der Richtung dieser Geschwindigkeit und der $+\xi$-Achse.

Dann bestehen die Gleichungen:

$$(3) \qquad \frac{d\xi}{dt} = g\cos G, \qquad \frac{d\eta}{dt} = g\sin G.$$

Wir sahen nun bereits im ersten Teile der Arbeit (siehe besonders Fig. 4), dass die Ein- und Austrittspunkte der zu betrachtenden Planeten fast auf den Asymptoten ihrer hyperbolischen Bahnen um den Stern liegen.

Unter der Annahme, dass dies strenge stattfindet, können wir sofort aus g, G und Δ die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{d\xi'}{dt}$ und $\frac{d\eta'}{dt}$ für die für die Punkte D' und R' ableiten; die Geschwindigkeit auf beiden Hyperbelasymptoten ist ja für die Punkte D' und R' ebenso gleich g, wie für D und R. Nur findet eine Drehung um den Winkel Δ statt, und zwar in verschiedenem Sinne, je nachdem die Bahn um den Stern recht- oder rückläufig ist (vergl. Fig. 6). Wenn das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen für $\left\{\begin{matrix}\text{rechtläufige}\\\text{rückläufige}\end{matrix}\right\}$ Bahnen um den Stern gilt, so ergeben sich für die Geschwindigkeitscomponenten an den Austrittspunkten die Formeln:

$$\frac{d\xi'}{dt} = g\cos(G \pm \Delta), \qquad \frac{d\eta'}{dt} = g\sin(G \pm \Delta).$$

oder indem man für g und G ihre Werte nach (3) einsetzt:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= \frac{d\xi}{dt}\cos\Delta \mp \frac{d\eta}{dt}\sin\Delta \\ \frac{d\eta'}{dt} &= \frac{d\eta}{dt}\cos\Delta \pm \frac{d\xi}{dt}\sin\Delta . \end{aligned}$$

Mit Hülfe von (2) (§ 19) kann man schliesslich $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\xi'}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ durch: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ ersetzen.

Man erhält so für die heliocentrischen Geschwindigkeitscomponenten bei Rückkehr zur Sonne:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{dx}{dt}\cos\Delta \pm \left(c_1 - \frac{dy}{dt}\right)\sin\Delta \\ \frac{dy'}{dt} &= -\left(c_1 - \frac{dy}{dt}\right)\cos\Delta \pm \frac{dx}{dt}\sin\Delta + c_1 . \end{aligned}$$

Da c_1, die Geschwindigkeit des Sterns, nach p. 49 immer grösser als $\frac{dy}{dt}$ ist, so ist die Klammergrösse stets positiv.

§ 22. *Darstellung des Winkels Δ durch die Excentricität.*

Die Gleichungen (5) des vorigen Paragraphen stellen die Geschwindigkeitscomponenten des Planeten nach Rückkehr zur Sonne dar; sie enthalten aber noch Δ. Um diesen Winkel auf bekannte Grössen zurückzuführen, betrachten wir (Fig. 7) den Stern I und die hyperbolische Bahn des Planeten $P'PP''$ um denselben.

Je weiter man sich vom Periastron P des Planeten entfernt, um so mehr nähern sich die Äste PP' und PP'' den Asymptoten AA' und AA''. II' und II'' seien die Radiivectoren nach den unendlich fernen Punkten der Hyperbel. Da diese letzteren auf den Hyperbelasymptoten liegen, so haben II' mit AA' und II'' mit AA'' einen gemeinsamen Punkt im unendlichen, d. h. diese Linien sind parallel. Also ist der Winkel Δ zwischen AA' und AA'' gleich dem Winkel zwischen II' und II''.

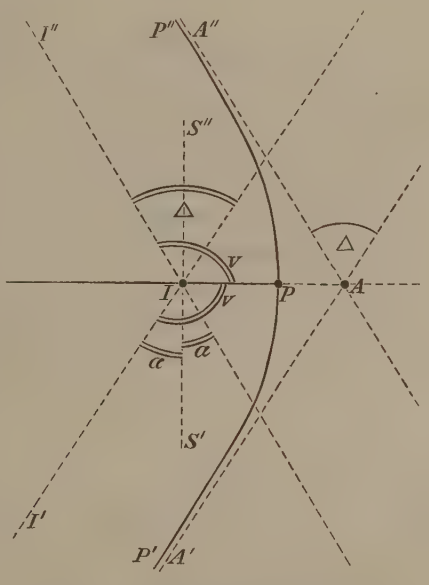


Fig. 7. Ausgezeichnete Winkel in Hyperbelbahnen.

Da nun die ganze Figur um die Hyperbelachse IPA symmetrisch ist, so ist der Winkel $I''IP = I'IP = V$, dem grössten Werte der wahren Anomalie.

Die Senkrechte $S'IS''$ zur Hyperbelachse halbiert also den Winkel Δ. Setzt man daher:

$$\alpha = V - 90^\circ \tag{6a}$$

so ergiebt die Figur (7) unmittelbar:

$$\Delta = 2\alpha. \tag{6}$$

Nach der Gleichung der Hyperbel

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

ist nun die wahre Anomalie V für den unendlich fernen Punkt durch die Gleichung: $\cos V = -\frac{1}{e}$ gegeben.

Führt man hierin durch (6[a]) den Winkel α ein, so folgt:

$$\sin\alpha = \frac{1}{e}. \tag{7}$$

Durch Vergleich dieser Gleichung mit (6) ergiebt sich, dass der Winkel Δ um so $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ wird, je $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{grösser}\end{matrix}\right\}$ die Excentricität e der Bahn um den 2ten Hauptkörper ist.

Für die Planeten 2, 3, 8 und 9 des § 17, welche in der Nähe von Grenzfällen der Stabilität liegen, ist e gross. (Der kleinste Wert ist ca. 28). Desgleichen sahen wir in § 16, dass die Fälle des Problems mit grossem Δ instabil sind. Daraus schliessen wir allgemein, dass für die Grenzfälle der Stabilität Δ klein, also e gross und α klein sind.

Ersetzt man daher in (7) $\sin\alpha$ durch α, so folgt:

$$\alpha = \frac{1}{e}$$

und mittels (6):

$$\Delta = \frac{2}{e}. \tag{8}$$

Die Bestimmung des Winkels Δ ist also jetzt auf die der Excentricität der Bahn um den Stern zurückgeführt.

§ 23. *Eine Formel für die Excentricität e der Bahn um den Stern.*

In § 21 und 22 haben wir $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ (die Geschwindigkeitscomponenten bei Rückkehr zur Sonne) durch e (die Excentricität der Bahn um den Stern) ausgedrückt. Es bliebt jetzt noch übrig, diese letztere Grösse als Function bekannter darzustellen.

Für den Eintrittspunkt in das Wirkungsbereich des Sterns sind $\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ bekannt (vergl. § 20). An Stelle dieser Grössen führen wir ρ, u, g und G ein:

$$\xi = \rho \cos u, \qquad \eta = \rho \sin u$$
$$\frac{d\xi}{dt} = g \cos G, \qquad \frac{d\eta}{dt} = g \sin G$$

(vergl. p. 21 und p. 53).

Mit Hülfe der Formeln p. 21 ergiebt sich dann:

$$\frac{d\rho}{dt} = g \cos(G - u)$$
$$k\sqrt{p} = \pm \rho g \sin(G - u) \tag{9}$$

und ferner:

$$e \sin v = \pm \frac{\rho g^2}{k^2} \sin(G - u) \cos(G - u)$$
$$e \cos v = \frac{\rho g^2}{k^2} \sin^2(G - u) - 1. \tag{10}$$

Aus den letzteren beiden Gleichungen folgt:

$$e^2 = \left(\frac{\rho g^2}{k^2} - 1\right)^2 \sin^2(G - u) + \cos^2(G - u). \tag{11}$$

Wir sahen nun p. 56, dass in der Nähe der Grenzfälle der Stabilität e gross ist. Demnach kann das Glied $\cos^2(G - u)$ in (11) vernachlässigt werden. Ausserdem kann aber 1 gegenüber $\frac{\rho g^2}{k^2}$ weggelassen werden.

Denn nach p. 49 ist der kleinste Wert, den ρ erreichen kann, $\frac{q_1}{2}$. Setzt man nun mit Vernachlässigung der planetaren Geschwindigkeiten $g^2 = c_1^2$ (vergl. p. 49), so wird:

$$\frac{\rho g^2}{k^2} = 145$$

Man findet also schliesslich:

$$(12^a) \qquad e = \frac{\rho g^2}{k^2}[\sin(G - u)]$$

worin $[\sin(G - u)]$ immer positiv zu nehmen ist. Setzt man an Stelle von ρ, g, G und u ihre Werte ein, so ergiebt sich:

$$(12^b) \qquad e = \frac{g}{k^2} \cdot \left[\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right]$$

wo:

$$g = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2}$$

(vergl. p. 53). Auch hier ist unter: $\left[\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right]$ der absolute Wert dieser Grösse zu verstehen.

§ 24. *Prüfung der Formeln der Paragraphen* 21, 22 *und* 23 *an den Beispielen des* § 17.

Mit Hülfe der in § 21, 22 und 23 entwickelten Formeln sind wir in der Lage, $\left(\frac{dx'}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dy'}{dt}\right)$, die Geschwindigkeitscomponenten des Planeten bei Rückkehr zur Sonne, als Functionen der Anfangs-coordinaten und Geschwindigkeiten darzustellen. Um die Genauigkeit dieser Darstellung zu prüfen, ziehen wir die Beispiele des § 17 zum Vergleiche heran.

Die Formeln (12) des vorigen Paragraphen geben zunächst einen Näherungswert für die Excentricität e der Bahn um den Stern.

Wenn man mit Hülfe von (12ª) resp. (12ᵇ) e berechnet, so ergiebt sich für die 9 Planeten des § 17 folgendes:

Planet	lg e nach (12)	Wert von lg e nach p. 46
1	2.02 324	2.02 009
2	1.48 682	1.48 523
3	1.44 926	1.44 757
4	1.30 416	1.30 284
5	1.08 357	1.08 329
6	1.53 146	1.53 017
7	1.55 695	1.55 565
8	1.60 387	1.60 254
9	1.62 557	1.62 423

Die Darstellung der Excentricität e durch die Formeln (12) kann also als eine sehr befriedigende bezeichnet werden.

Um die Geschwindigkeitscomponenten bei Rückkehr zur Sonne $\left(\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}\right)$ zu erhalten, berechnet man zunächst Δ nach Formel (8) § 22: $\Delta = \frac{2}{e}$, oder mit Benutzung von (12ª) resp. (12ᵇ) (vergl. p. 57): [1]

$$\Delta = \frac{2k^2}{g\left[\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right]} = \frac{2k^2}{rg^2\,[\sin(G-u)]} \tag{13}$$

wobei die [ ] immer positiv zu nehmen ist, und

$$g = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2}.$$

Wenn man ferner in (5) § 21 (weil nach p. 56 Δ ein kleiner Winkel ist): $\cos\Delta = 1$ und $\sin\Delta = \Delta$ setzt, so ergiebt sich:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} \pm \left(c_1 - \frac{dy}{dt}\right)\Delta$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \pm \frac{dx}{dt}\Delta. \tag{14ª}$$

[1] r wurde an die Stelle von ρ gesetzt, weil für den Eintrittspunkt in das Wirkungsbereich des Sterns beide Grössen gleich sind (siehe p. 37).

In dieser Formel kann nach Einsetzung von Δ aus (13) das Doppelvorzeichen weggelassen werden.

Das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen gilt nämlich in (14^a) (vergl. p. 54) für $\left\{\begin{matrix}\text{rechtläufige}\\\text{rückläufige}\end{matrix}\right\}$ Bahnen um den Stern. Aber $\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}$ (die Flächengeschwindigkeit) ist für $\left\{\begin{matrix}\text{rechtläufige}\\\text{rückläufige}\end{matrix}\right\}$ Bahnen $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$. Man findet also durch Einsetzung von (13) in (14^a):

$$(14^b)\qquad \begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{dx}{dt} + \frac{2k^2}{g}\cdot\frac{c_1 - \frac{dy}{dt}}{\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}} = \frac{dx}{dt} + \frac{2k^2}{rg^2}\cdot\frac{c_1 - \frac{dy}{dt}}{\sin(G-u)} \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{dy}{dt} + \frac{2k^2}{g}\cdot\frac{\frac{dx}{dt}}{\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}} = \frac{dy}{dt} + \frac{2k^2}{rg^2}\cdot\frac{\frac{dx}{dt}}{\sin(G-u)} \end{aligned}$$

wobei man nicht mehr darauf zu achten hat, ob der Planet um den Stern recht- oder rückläufig ist.

Wenn man unter Benutzung der oben nach (12) gefundenen Werte von e mittels der Formeln (14^a) $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$ für die 9 Planeten des § 17 berechnet, so ergiebt sich folgendes:

Planet	Nach Formel (14^a)		Werte nach § 17	
	$\frac{dx'}{dt}$	$\frac{dy'}{dt}$	$\frac{dx'}{dt}$	$\frac{dy'}{dt}$
1	+ 0.004 512	+ 0.020 273	+ 0.001 578	+ 0.020 230
2	+ 0.015 899	+ 0.016 327	+ 0.013 320	+ 0.016 648
3	+ 0.018 404	+ 0.016 220	+ 0.015 831	+ 0.016 854
4	+ 0.025 292	+ 0.015 937	+ 0.022 654	+ 0.017 156
5	+ 0.041 361	+ 0.015 670	+ 0.038 510	+ 0.018 994
6	— 0.014 453	+ 0.014 385	— 0.017 094	+ 0.014 784
7	— 0.013 632	+ 0.014 335	— 0.016 269	+ 0.014 679
8	— 0.012 241	+ 0.014 236	— 0.014 859	+ 0.014 504
9	— 0.011 646	+ 0.014 188	— 0.014 259	+ 0.014 423

In der Nähe der Grenzfälle der Stabilität (Siehe die Planeten 2, 3, 8 und 9) weicht die Darstellung dieser Grössen im Maximum um ca. 10 Procent von der Wahrheit ab.

§ 25. *Darstellung der Stabilitätsgrenzen.*

Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass die Geschwindigkeitscomponenten bei Rückkehr zur Sonne durch die Formeln (14) ziemlich gut dargestellt werden. Besässe man nun noch ähnliche Formeln zur Darstellung von r' (des heliocentrischen Radiusvectors bei Rückkehr zur Sonne), so könnte man mittels (*B*) (p. 51) a' (die grosse Halbachse der Bahn nach Rückkehr zur Sonne) bestimmen. Die Bestimmung von r' ist jedoch mit ziemlichen Schwierigkeiten verbunden. Die Näherungsformeln werden verwickelt und die Behandlung der Aufgabe verliert an Übersichtlichkeit.

Die heliocentrische Bewegung des Planeten während seines Aufenthaltes im Wirkungsbereiche des 2ten Hauptkörpers ist eine ziemlich geringe. Wenn man für die Planeten des § 17 die heliocentrischen Radiivectoren beim Eintritt in das Wirkungsbereich des Sterns (r) und bei Rückkehr zur Sonne (r') vergleicht, so ergiebt sich folgendes:

Planet	r	r'
1	0.72	0.73
2	1.11	1.18
3	1.12	1.20
4	1.16	1.29
5	1.20	1.43
6	1.43	1.35
7	1.44	1.36
8	1.46	1.39
9	1.47	1.40

Man sieht also, dass r und r', besonders in der Nähe der Grenzfälle der Stabilität, nicht sehr von einander verschieden sind. Ausserdem kommt aber hier die Form der Gleichung (*B*), p. 51, in Betracht.

Das Glied $\frac{2}{r'}$ ändert sich nur wenig mit der Annäherung an die Bahn des Sterns. (Vergl. nebenstehende Übersicht von r'). Ganz anders verhält es sich mit:

$$\frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2\right].$$

Dieses letztere Glied wächst mit Annäherung an die Bahn des Sterns sehr schnell

und ist daher für die Bestimmung der Stabilitätsgrenze in erster Linie massgebend. Man kann also, wenn es sich nur um die Aufsuchung der letzteren handelt, setzen:

$$\frac{1}{a'} = \frac{2}{r} - \frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2\right] \tag{15}$$

d. h. r' mit r vertauschen.

Um zu sehen, in wie weit diese Annahme die Stabilitätsgrenze verschiebt, ziehen wir wiederum die Beispiele des § 17 heran. Wenn man, unter Benutzung der in § 24 mittels der Formel (14^a) gefundenen Werte von $\frac{dx'}{dt}$ und $\frac{dy'}{dt}$, $\left(\frac{1}{a'}\right)$ nach (15) berechnet, so ergiebt sich folgendes:

Planet	r	$\frac{1}{a'}$ nach Formel (15)	$\frac{1}{a'}$ nach § 17
1	0.72	+ 1.320	+ 1.360
2	1.11	+ 0.047	+ 0.162
3	1.12	— 0.248	— 0.141
4	1.16	— 1.296	— 1.173
5	1.20	— 4.944	— 4.833
6	1.43	— 0.006	— 0.242
7	1.44	+ 0.067	— 0.154
8	1.46	+ 0.179	— 0.017
9	1.47	+ 0.222	+ 0.036

Die Darstellung von a' durch (15) ist, wie zu erwarten war, keine genügende. Hingegen werden die Stabilitätsgrenzen ziemlich genau erhalten. Die innere liegt übereinstimmend nach Formel (15) und der Rechnung des § 17 zwischen $r = 1.11$ und $r = 1.12$; die äussere liegt nach (15) zwischen 1.43 und 1.44, nach § 17 zwischen 1.46 und 1.47. Man schliesst hieraus:

Durch obiges Näherungsverfahren werden die Stabilitätsgrenzen bis auf wenige hundertel Erdbahnradien genau erhalten.

§ 26. *Über die Berechnung der Stabilitätsgrenzen in der Bahnebene des Sterns.*

Wenn sich die zu betrachtenden Planeten in der Bahnebene des Sterns bewegen, kann man mittels der bisher entwickelten Formeln die Stabilitätsgrenzen finden.

Für die Grenzfälle der Stabilität (vergl. p. 45) ergiebt sich zunächst nach 15 (p. 62):

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{r}.$$

Setzt man hierin 14^a (p. 59) ein, so folgt unter Weglassung des Doppelvorzeichens (Siehe p. 60):

$$(16^a) \qquad \frac{2k^2}{r} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2c_1 \Delta \frac{dx}{dt} + g^2 . \Delta^2$$

weil:

$$\left(c_1 - \frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = g^2 \text{ ist.} \quad \text{(Vergl. p. 53).}$$

$\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ sind die heliocentrischen Geschwindigkeitscomponenten des Planeten beim Eintritte in das Wirkungsbereich des Sterns. Da wir nun die Bahn des Planeten als *kreisförmig* betrachten wollen, so ist:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{r}.$$

Daher geht (16^a) in folgende Gleichung über:

$$(16) \qquad \frac{k^2}{r} = + 2c_1 \Delta \frac{dx}{dt} + g^2 \Delta^2.$$

Um (16) rechnerisch zu verwerten, betrachten wir eine Kreisbahn mit gegebenem Radius r und suchen für $\frac{dx}{dt}$ und g Näherungswerte. Die

Wegreissung eines Planeten aus dem Sonnensysteme erfolgt in der Nähe der Bahn des Sterns (vergl. § 17). Planeten, die sich bei ihrem Eintritte in das Wirkungsbereich des Sterns in grösserer Entfernung von der Bahn desselben befinden, bleiben dem Sonnensysteme erhalten. Hat man also eine Kreisbahn von gegebenem Radius r (siehe Tafel), so liegen die Grenzlagen der Stabilität in der Nähe ihrer Schnittpunkte mit der Bahn des Sterns (A und A'). Man kann daher die heliocentrischen Geschwindigkeitscomponenten des Planeten in den Grenzlagen der Stabilität in erster Näherung durch die Werte dieser Grössen in A und A' ersetzen. Für $\left\{\begin{matrix} A' \\ A \end{matrix}\right\}$ ist:

$$x = q_1 \,, y = \pm \sqrt{r^2 - q_1^2}$$

und folglich (siehe p. 20):

$$(17) \qquad \left| \begin{matrix} \dfrac{dx}{dt} = \mp n \sqrt{r^2 - q_1^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = + q_1 \cdot n \,. \end{matrix} \right.$$

Hierbei ist $n = \pm \dfrac{k}{r_2^3}$, je nachdem der Planet um die Sonne rechtläufig (Bewegungsrichtung ASA') oder rückläufig (Bewegungsrichtung $A'SA$) ist (vergl. p. 46 Anm. 1). Hieraus ergeben sich $\dfrac{d\xi}{dt}$, $\dfrac{d\eta}{dt}$, g und G nach p. 20 und 53 durch die Gleichungen:

$$(17^b) \qquad \begin{matrix} \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{dx}{dt} \,, & \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{dy}{dt} - c_1 \\ \dfrac{d\xi}{dt} = g \cos G, & \dfrac{d\eta}{dt} = g \sin G. \end{matrix}$$

Betrachtet man also eine Kreisbahn mit dem Radius r, so enthält die Gleichung (16) in erster Näherung lauter bekannte Grössen, ausser Δ. Man kann sie also nach Δ auflösen und findet so:

$$(18) \qquad \Delta = - \frac{c_1}{g^2} \cdot \frac{dx}{dt} \pm \sqrt{\frac{c_1^2}{g^4} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{g^2 r}} \,.$$

Da wir in (16ª) das Doppelvorzeichen von Δ weggelassen haben, so ist nach (13) § 24 *inclusive Vorzeichen:*

$$(19^a) \qquad \Delta = \frac{2k^2}{g\left[\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right]} = \frac{2k^2}{rg^2[\sin(G-u)]}$$

oder

$$(19) \qquad \sin(G-u) = \frac{2k^2}{\Delta}\cdot\frac{1}{rg^2}$$

Δ ist nach (18) bekannt; desgleichen kennen wir r, und g nach 17ᵇ. Demnach können wir aus (19) u bestimmen. Hieraus würden sich für jeden Wert von Δ zwei Werte von u ergeben. G ist immer nahe gleich $-90°$, weil c_1 gegenüber $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ sehr gross ist (vergl. 17ᵇ); demnach ist $\sin(G-u)$ nahe gleich $-\cos u$; mithin würden die beiden Werte von u, welche demselben Werte von Δ entsprechen, im $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\\text{vierten}\end{matrix}\right\}$ oder im $\left\{\begin{matrix}\text{zweiten}\\\text{dritten}\end{matrix}\right\}$ Quadranten liegen, je nachdem Δ negativ oder positiv ist.

Da jedoch der Planet bei seinem Eintritt in das Wirkungsbereich des Sterns von letzterem eingeholt wird (vergl. p. 51), so muss für diesen Augenblick η, oder $r\sin u$ immer positiv sein.

Demnach kann u nur im ersten oder zweiten Quadranten liegen, und es entspricht jedem Werte von Δ nur ein Wert von u.

Nachdem so die beiden Werte von u bestimmt sind, berechnen sich ξ, η, x und y nach den Formeln:

$$(20) \qquad \begin{cases} \xi = r\cos u, & \eta = r\sin u \\ x = q_1 + \xi, & y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \end{cases}$$

Das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen der letzteren Gleichung gilt, wenn die Grenzlagen auf der Seite von $\left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\}$ bestimmt werden sollen. Wenn man auf diese Weise x und y verbessert hat, so kann man von neuem $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ nach den Formeln: $\frac{dx}{dt} = -yn$, $\frac{dy}{dt} = +xn$ (p. 20) berechnen, und erhält so noch genauere Werte von Δ, n, x und y. Gewöhnlich bleibt die Rechnung ziemlich schnell stehen; besonders, wenn man von Punkt zu

Punkt der Stabilitätsgrenze weitergehend genäherte Werte von x und y besitzt, genügt eine ein-oder zweimalige Durchrechnung der obigen Recursionsmethode.

§ 27. *Bemerkungen zur Darstellung der Stabilitätsgrenzen auf der Tafel.*

Wenn man das im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Verfahren auf *um die Sonne rechtläufige Kreisbahnen* anwendet, so erhält man als Stabilitätsgrenzen die auf der Tafel mit I M IV und II N III bezeichneten Curven.

Man muss sich also vorstellen, dass sich verschiedene Planeten um die Sonne in Kreisbahnen bewegen, und zwar in derselben Richtung, wie der Stern (auf der Tafel im Sinne ASA'). Wenn sich einer dieser Planeten *beim Eintritte in das Wirkungsbereich des Sterns* (vergl. § 14) auf einer der Stabilitätsgrenzen befindet (der Stern muss also die entsprechende Lage haben), so beschreibt er nach seiner Rückkehr zur Sonne eine Parabel um dieselbe (Grenzfall der Stabilität). Befindet er sich aber in diesem Augenblicke zwischen den beiden Stabilitätsgrenzen, so beschreibt er schliesslich eine Hyperbel um die Sonne (instabiler Fall). Das durch die Curven I IV und II III eingeschlossene Stück enthält also die Gesammtheit aller *Eintrittspunkte* der instabilen Fälle des Problems.

Wir sahen p. 51, wie man zu jeder Lage des Planeten bei *Eintritt* in das Wirkungsbereich des Sterns die entsprechende Lage des letzteren construiren kann. Also entspricht jedem Punkte der Stabilitätsgrenze eine Lage des Sterns.

§ 28. *Über die Schnittpunkte der Stabilitätsgrenzen in der Bahnebene des Sterns mit dessen Apsidenlinie.*

Einige Teile der Grenzcurven der Stabilität lassen sich durch einfache Formeln darstellen, was zu eigentümlichen, allgemeinen Resultaten führt.

Zunächst kann man sehr leicht die Grenzlagen der Stabilität auf der x Achse bestimmen, oder mit andern Worten die Schnittpunkte der Stabilitätsgrenzen mit der Apsidenlinie des Sterns. Für diese Lagen sind die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der Planeten: $x = r$, $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ und $\frac{dy}{dt} = \pm \frac{k}{\sqrt{r}}$, je nachdem die Kreisbahn $\left\{\begin{matrix}\text{rechtläufig}\\ \text{rückläufig}\end{matrix}\right\}$ um die Sonne ist. Nach p. 64 folgt hieraus für die Geschwindigkeitscomponenten bezüglich des Sterns:

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \frac{d\eta}{dt} = \pm \frac{k}{\sqrt{r}} - c_1$$

und:

$$g = c_1 \mp \frac{k}{\sqrt{r}}, G = -90°$$

Aus (18) p. 64 ergiebt sich daher:

$$\Delta = \pm \frac{k}{g\sqrt{r}}$$

und aus 19^a p. 65:

$$\Delta = \frac{2k^2}{g^2[r - q_1]}.$$

Durch Vergleich dieser beiden Werte von Δ folgt:

$$r - q_1 = \pm \frac{2k\sqrt{r}}{g}$$

oder:

$$r = q_1 + \frac{2k^2}{g^2} \pm \frac{2k}{g}\sqrt{q_1 + \frac{k^2}{g^2}}.$$

$\frac{k^2}{g^2}$ ist aber gegenüber q_1 sehr klein. Denn setzt man näherungsweise $g = c_1$ (Vernachlässigung der planetaren Geschwindigkeiten), so folgt: $\frac{k^2}{g^2} = 0.004$. Man kann also setzen:

(21) $$r - q_1 = \pm \frac{2k}{g}\sqrt{q_1}.$$

Da g nahe gleich c_1 ist, so ergiebt sich der Satz:

Auf der Apsidenlinie des Sterns schneiden die Grenzcurven zu beiden Seiten der Bahn desselben ein Stück ab, welches umgekehrt proportional seiner Geschwindigkeit und direct proportional der Quadratwurzel seines Perihelabstandes ist.

Die störende Wirkung des Sterns ist also um so kleiner, je grösser seine Geschwindigkeit ist.

Mit Benutzung der Formel (21) ergiebt sich für die von uns gewählte Bahn des Sterns:

1) für um die Sonne rechtläufige Kreisbahnen (entsprechend den auf der Tafel eingezeichneten Grenzcurven):

Innere Grenze: $r =$	1.11 (IM IV)
Aeussere » : $r =$	1.43 (IINIII)
Differenz:	0.32

2) Für rückläufige Kreisbahnen:

Innere Grenze:	1.13
Aeussere » :	1.41
Differenz:	0.28

Die Breite des instabilen Bereiches beträgt also auf der Apsidenlinie in beiden Fällen ca. $\frac{1}{3}$ Erdbahnradius.

Man könnte glauben, dass die Bewegung des Planeten auf die Lage der Stabilitätsgrenzen wenig Einfluss hat. Um dies zu entscheiden, setzen wir in (16^a) $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ gleich null; dann ergiebt sich:

$$\Delta^2 = \frac{2k^2}{rg^2} \text{ und aus } (19^a) \text{ p. } 65:$$

$$\Delta = \frac{2k^2}{g^2\,[r - q_1]};$$

oder unter Vernachlässigung von $\frac{k^2}{g^2}$, wie oben:

$$r - q_1 = \pm \frac{k}{g}\sqrt{2q_1}\,.$$

Durch Vergleich dieser Formel mit (21) sieht man, dass die Vernachlässigung der Planetenbewegung durchaus unstatthaft ist, da durch dieselbe die Breite des instabilen Bereiches auf der Apsidenlinie durch $\sqrt{2}$ dividiert wird.

§ 29. *Die Asymptoten der Stabilitätsgrenzen in der Bahnebene des Sterns.*

Die Stabilitätsgrenzen in der Bahnebene des Sterns nähern sich mit wachsender Entfernung von der Sonne asymptotisch gewissen Curven, die durch verhältnissmässig einfache Gleichungen darstellbar sind.

Je grösser nämlich r ist, um so mehr nähert sich für die Lagen A und A' (siehe Tafel):

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{k}{\sqrt{r}}\,,\ \frac{dy}{dt} = 0;$$

hieraus folgt (vergl. p. 64):

$$\frac{d\xi}{dt} = \pm \frac{k}{\sqrt{r}}\,,\ \frac{d\eta}{dt} = -c_1\,.$$

Für die grösseren Entfernungen von der Sonne, welche wir jetzt ausschliesslich betrachten, ist $\frac{d\xi}{dt}$ gegenüber $\frac{d\eta}{dt}$ sehr klein. Mithin kann man setzen:

$$g = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2} = c_1\,.$$

Da ferner die Stabilitätsgrenzen immer ziemlich nahe der Bahn des Sterns verlaufen, so ist ξ gegenüber η klein. Da nun beim Eintritt in das Wirkungsbereich des Sterns

$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2 = r^2$$

ist, so kann man in Formel 19ª mit genügender Annäherung $\eta = \rho = r$ setzen und erhält so:

$$\Delta = \frac{2k^2}{c_1\left(-\xi c_1 - r\frac{dx}{dt}\right)}$$

oder

$$\xi = x - q_1 = -\frac{2k^2}{c_1^2\Delta} - \frac{r}{c_1}\cdot\frac{dx}{dt}. \tag{22}$$

Diese Gleichung giebt, nachdem alle Grössen auf der rechten Seite als Functionen von r dargestellt sind, ein übersichtliches Bild vom Verlaufe der Asymptoten.

Wenn $\frac{dx}{dt} = +\frac{k}{\sqrt{r}}$ ist, so folgt nach (18) p. 64:

$$\Delta = \frac{k}{c_1\sqrt{r}}(-1 \pm \sqrt{2})$$

woraus sich nach (22) ergiebt:

$$q_1 - x = \frac{k\sqrt{r}}{c_1}(3 + 2\sqrt{2}) \tag{1}$$

$$q_1 - x = \frac{k\sqrt{r}}{c_1}(3 - 2\sqrt{2}). \tag{2}$$

Wenn andererseits $\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{\sqrt{r}}$ ist, so folgt:

$$\Delta = \frac{k}{c_1\sqrt{r}}(1 \pm \sqrt{2})$$

und

$$x - q_1 = \frac{k\sqrt{r}}{c_1}(3 + 2\sqrt{2}) \tag{3}$$

$$x - q_1 = \frac{k\sqrt{r}}{c_1}(3 - 2\sqrt{2}). \tag{4}$$

Die Logarithmen der Grössen $\left\{\begin{matrix} 3 + 2\sqrt{2} \\ 3 - 2\sqrt{2} \end{matrix}\right\}$ sind resp. $\left\{\begin{matrix} 0.76555 \\ 9.23429 \end{matrix}\right\}$.

Aus den Formeln (1) und (2) einerseits, (3) und (4) andererseits, geht hervor, dass sich der Abstand je zweier zusammengehörigen Stabilitätsgrenzen mit wachsender Entfernung von der Sonne immer mehr dem Ausdrucke:

$$4\sqrt{2} \cdot \frac{k\sqrt{r}}{c_1} = [0.75258] \frac{k\sqrt{r}}{c_1} \text{ nähert.}$$

D. h.: *Die Breite des instabilen Bereiches ist der Geschwindigkeit des Sterns umgekehrt proportional, der Quadratwurzel aus der Entfernung des Planeten von der Sonne direct proportional.*

Man schliesst hieraus für die Bahnebene des Sterns:

Die Veränderungen, welche ein Stern in einem Planetensystem hervorrufen kann, sind um so kleiner, je grösser seine Geschwindigkeit ist.

Für $r = 30$ (etwa die mittlere Entfernung des Neptun von der Sonne) ergiebt sich für den gegenseitigen Abstand der Stabilitätsgrenzen: 2.05. Demnach beherrscht der Stern in dieser Entfernung von der Sonne ein Gebiet von ca. 2 Erdbahnradien Breite.

Die durch die Gleichungen (1), (2), (3) und (4) definierten Curven bilden in grösserer Entfernung von der Sonne die Asymptoten der auf der Tafel mit IM, IIN, IIIN und IVM bezeichneten Stabilitätsgrenzen; nach § 27 wurden bei Berechnung dieser Grössen die Kreisbahnen als *rechtläufig um die Sonne* vorausgesetzt. (D. h. ihre Bewegung würde auf der Tafel im Sinne *ASA'* erfolgen. Vergl. p. 46 Anm. 1). Demnach nähert sich für die Lagen I und II $\frac{dx}{dt}$ mit wachsender Entfernung von der Sonne immer mehr dem Wert $+\frac{k}{\sqrt{r}}$; also sind die Asymptoten dieser Stabilitätsgrenzen durch die Gleichungen (1) und (2) gegeben. Die entsprechenden Curven verlaufen beide innerhalb der Bahn des Sterns, (1) in grösserer, (2) in kleinerer Entfernung von derselben. Man schliesst hieraus dass sich die Stabilitätsgrenze IM in grösserer Entfernung von der Sonne asymptotisch an die Curve (1) anschliesst. IIN durchkreuzt die Bahn des Sterns und nähert sich dann mehr und mehr der Curve (2).

Beim Eintritte in das Wirkungsbereich des Sterns befinden sich also die durch (1) und (2) gegebenen Planeten *innerhalb* der Bahn des Sterns.

In der Zeit aber, welche der Stern braucht, um sich ihnen zu nähern, haben sie bereits ein gewisses Stück in ihrer Bewegungsrichtung (ASA') zurückgelegt. Der Stern geht schliesslich zwischen ihnen beiden hindurch, so dass der Planet (I) um denselben rechtläufig, (II) rückläufig ist.

In ähnlicher Weise findet man (wiederum für *um die Sonne rechtläufige Kreisbahnen*) dass die Curve (IIIN) allmälig in (3) übergeht und dass (IVM) nach Durchkreuzung der Bahn des Sterns sich mehr und mehr an (4) auschliesst.

Für um die Sonne rückläufige Bahnen gelten dieselben Formeln wie für rechtläufige, nur dass hier in der Nähe von $\left\{\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right\}$ $\frac{dx}{dt}$ $\left\{\begin{matrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{matrix}\right\}$ ist.

Man erhält daher die Asymptoten der Stabilitätsgrenzen von um die Sonne rückläufigen Bahnen aus denjenigen für rechtläufige Bahnen durch Spiegelung bezüglich der Apsidenlinie des Sterns.

§ 30. *Über einen Fall des Problems ausserhalb der Bahnebene des Sterns.*

Wir suchten im vorhergehenden Grenzfälle der Stabilität auf, unter der Voraussetzung, dass sich die zu betrachtenden Planeten in der Bahnebene des Sterns bewegen. Ein wichtiger Fall des allgemeinen Problems lässt sich aber in ganz ähnlicher Weise behandeln.

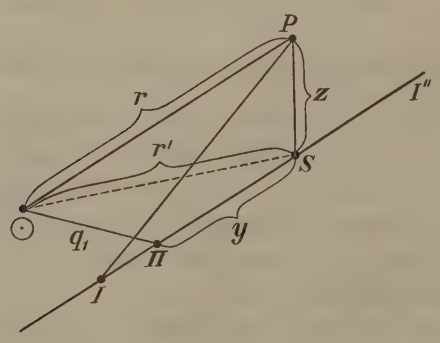


Fig. 8. Anfangslage P eines Planeten *ausserhalb* der Bahnebene des Sterns.

Es seien (Siehe Fig. 8): $\odot$ die Sonne, I der Stern und P der Planet beim Eintritt in das Wirkungsbereich des Sterns. Demnach ist: $\odot P = IP$. II'' sei die Bahn des Sterns um die Sonne, Π ihr Perihel.

Wir führen nun eine 3te Coordinatenachse z ein, welche

auf der xy Ebene, d. h. der Bahnebene des Sterns (vergl. § 3), senkrecht steht. Beim Eintritte in das Wirkungsbereich des Sterns (Siehe Fig. 8) soll $x = q_1$ sein, d. h. die Projection (S) des Planeten auf die Bahnebene des Sterns soll in die Bahn des letzteren (II') fallen. Für diesen Zeitpunkt soll ferner sein:

$$\text{(C)} \qquad \frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = \pm \frac{k}{\sqrt{r}}$$

d. h. *die Bewegung des Planeten erfolgt senkrecht zur Bahn des Sterns.* Die Geschwindigkeit ist so gewählt, dass sie einer nahezu kreisförmigen Bahn um die Sonne entspricht. Denn die Stabilitätsgrenzen verlaufen in der Nähe der Bahn des Sterns (Vergl. § 17 und Tafel) und in Folge dessen liegt P nahe an S.

Die Coordinaten bezüglich des Sterns bezeichnen wir mit ξ, η und ζ. (Vergl. § 8.) Wie früher bestehen folgende Gleichungen (da wir die Bahn des Sterns wie bisher als eine Gerade betrachten):

$$\xi = x - q_1, \eta = y - y_1, \zeta = z$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt}, \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - c_1, \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

oder mit Bentzung von (C) und $x = q_1$:

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} &\xi = 0, \ \eta = y - y_1, \zeta = z \\ &\frac{d\xi}{dt} = 0, \frac{d\eta}{dt} = -c_1, \frac{d\zeta}{dt} = \pm \frac{k}{\sqrt{r}}. \end{aligned}$$

An Stelle von η kann man auch[1] $+ r'$ (die Projection von r auf die xy Ebene) setzen, weil PS senkrecht auf derselben steht (siehe oben) und $(\odot P) = (IP)$ ist.

Aus den Gleichungen (D) geht hervor, dass die Bewegung um den Stern in der $\eta\zeta$ Ebene erfolgt. Man kann daher auf diesen Fall viele

[1] η ist nach p. 65 beim Eintritte in das Wirkungsbereich des Sterns positiv, weil der Planet von letzterem eingeholt wird.

Formeln der vorigen Paragraphen direct anwenden, wenn man an Stelle von ξ und η resp. η und ζ setzt. Man findet so aus (4) p. 54:

$$(4') \qquad \begin{aligned} \frac{d\eta'}{dt} &= \frac{d\eta}{dt} - \frac{d\zeta}{dt}\,\Delta \\ \frac{d\zeta'}{dt} &= \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\,\Delta \end{aligned}$$

worin wegen p. 60 das Doppelvorzeichen weggelassen wurde. Für die Rückkehr zur Sonne ist:

$$(E) \qquad \frac{d\eta'}{dt} = \frac{dy'}{dt} - c_1\,, \qquad \frac{d\zeta'}{dt} = \frac{dz'}{dt}$$

worin $\frac{dy'}{dt}$ und $\frac{dz'}{dt}$ die *heliocentrischen* Geschwindigkeitscomponenten bezeichnen.

Unter Benutzung von D und E ergiebt sich aus (4'):

$$(F) \qquad \begin{aligned} \frac{dy'}{dt} &= \quad -\frac{dz}{dt}\,.\,\Delta \\ \frac{dz'}{dt} &= \frac{dz}{dt} - c_1\,.\,\Delta \end{aligned}$$

wobei $\frac{dz}{dt} = \pm\frac{k}{\sqrt{r}}$ ist.

Die Grenzfälle der Stabilität sind nun durch die Gleichung:

$$(G) \qquad 0 = \frac{2}{r} - \frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

definiert. (Vergl. § 25.) Durch Einsetzung von (F) in (G) ergiebt sich, indem man $\left[\frac{dz}{dt}\right]^2$ gegen c_1^2 vernachlässigt (Vergl. p. 69):

$$0 = \frac{1}{r} - \frac{1}{k^2}\left[-2\,c_1\,\Delta\,.\,\frac{dz}{dt} + c_1^2\,\Delta^2\right]$$

oder wenn man nach Δ auflöst

$$(H) \qquad \Delta = +\frac{1}{c_1}\,.\,\frac{dz}{dt} \pm \frac{k}{c_1}\sqrt{\frac{2}{r}}$$

Analog (13) p. 59 ist:

$$\Delta = \frac{2k^2}{c_1\left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right)} = \frac{2k^2}{c_1\left(r'\frac{dz}{dt} + z\,c_1\right)}$$

In der letzteren Gleichung kann man r an Stelle von r' setzen, weil P nahe an S liegt. Man erhält so:

(I) $$z = \frac{2k^2}{c_1^2\Delta} - \frac{r}{c_1}\frac{dz}{dt}.$$

Indem man (H) in (I) substituiert, erhält man die Gleichungen ähnlicher Form, wie in § 29.

Wenn $\frac{dz}{dt} = +\frac{k}{\sqrt{r}}$ ist, so folgt aus (H):

$$\Delta = \frac{k}{c_1\sqrt{r}}(1 \pm \sqrt{2})$$

oder mittels (I)

(1) $$z = -\frac{k\sqrt{r}}{c_1}(3 - 2\sqrt{2})$$

(2) $$z = -\frac{k\sqrt{r}}{c_1}(3 + 2\sqrt{2}).$$

Wenn andererseits $\frac{dz}{dt} = -\frac{k}{\sqrt{r}}$ ist, so ergiebt sich:

$$\Delta = \frac{k}{c_1\sqrt{r}}(-1 \pm \sqrt{2})$$

(3) $$z = \frac{k\sqrt{r}}{c_1}(3 + 2\sqrt{2})$$

(4) $$z = \frac{k\sqrt{r}}{c_1}(3 - 2\sqrt{2}).$$

Diese Gleichungen sind ganz ähnlich denen für die Asymptoten der Stabilitätsgrenzen in der Bahnebene des Sterns (Vergl. p. 70). Sie geben aber (z) den Abstand der Stabilitätsgrenze von derselben.

Demnach ist in diesem Falle die Ausdehnung des instabilen Bereichs senkrecht zur Bahnebene des Sterns seiner Geschwindigkeit umgekehrt proportional, der Quadratwurzel aus der Entfernung des Planeten von der Sonne direct proportional.

§ 31. *Überblick über die Hauptresultate der Arbeit.*

Die Ergebnisse obiger Untersuchungen über die Grenzfälle der Stabilität lassen sich im wesentlichen in folgendem Satze zusammenfassen:

Wenn in ein Planetensystem ähnlich dem unseren ein Stern von der Masse des Centralkörpers mit grosser Geschwindigkeit eindringt, so werden alle innerhalb eines gewissen Gebietes befindlichen Planeten dem Systeme entrissen. Die Grösse dieses instabilen Bereiches ist umgekehrt proportional der Geschwindigkeit des Fremdkörpers, und wächst mit der Quadratwurzel aus der Entfernung vom Centralkörper.

Aus dem im zweiten Teile der Arbeit gegebenen Zahlenmaterial geht hervor, dass für die von uns getroffene Wahl der Bahn des Sterns (vergl. § 1) dieses Gebiet sehr klein ist. Man schliesst hieraus in Verbindung mit obigem Satze:

Wenn die Geschwindigkeit des Fremdkörpers einige Hundert Kilometer in der Secunde beträgt, ist er im allgemeinen nicht im Stande, in einem Planetensysteme, wie dem unsrigen, durchgreifendere Veränderungen hervorzurufen. Das Gebiet, wo er solche hervorrufen könnte, wird mit wachsender Geschwindigkeit immer kleiner. Wenn sich zufällig ein Planet zu der entsprechenden Zeit in diesem engen Raume befindet, wird er allerdings dem Systeme entrissen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist aber sehr gering.

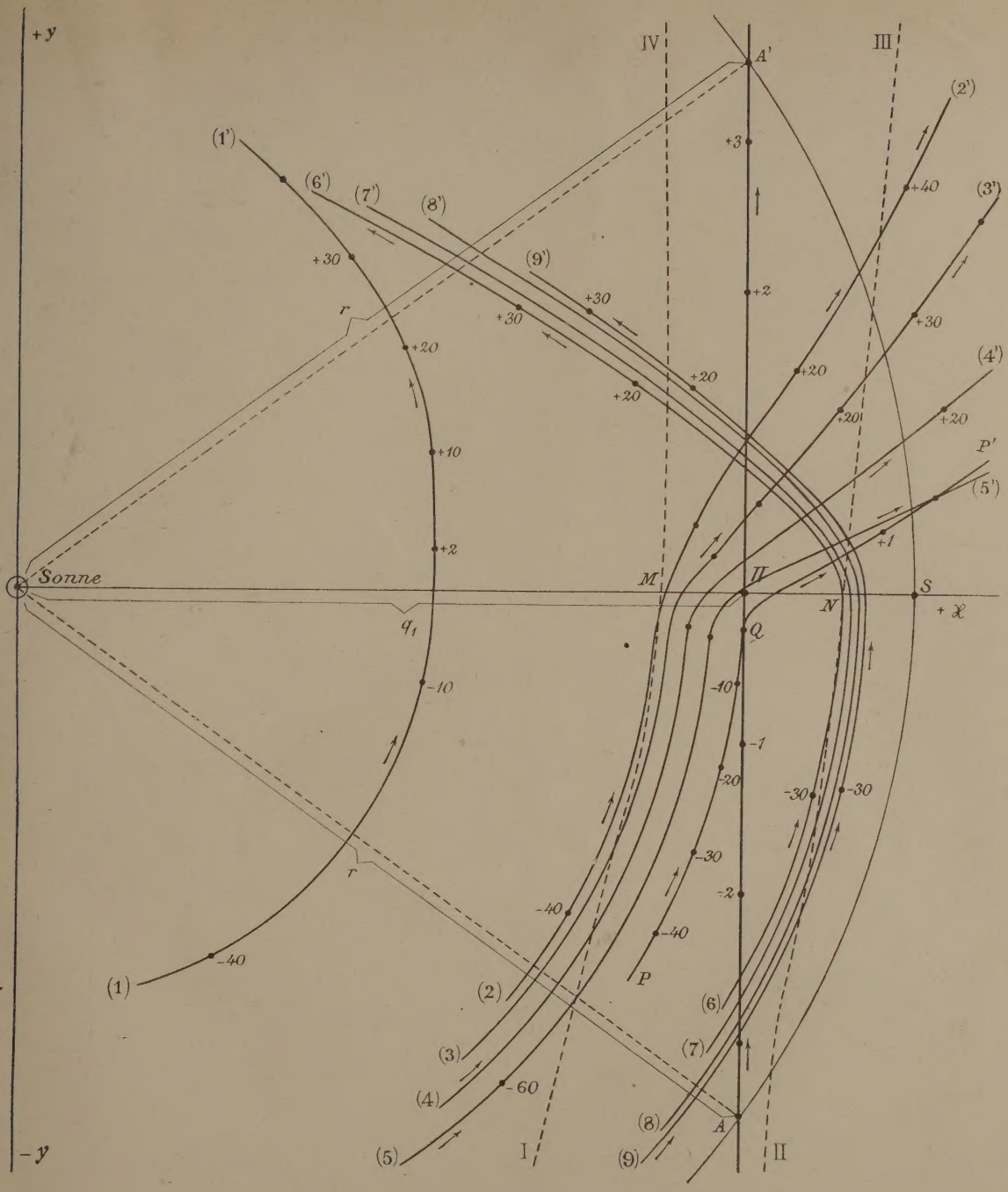
In anderer Hinsicht verändert jedoch ein derartiger Eindringling die Constitution eines Planetensystems. Der Raum zwischen den Planeten ist ja mit grossen Mengen von Meteorsteinen erfüllt. Der Fremd-

körper verwandelt aber immer eine grosse Zahl von Meteorsteinbahnen, die elliptisch waren, in hyperbolische. Damit ist notwendig ein Massenverlust des ganzen Systems verbunden, mag derselbe auch gering sein. Andererseits wird die Verteilung des Meteorsteinmaterials verändert. Es bilden sich in der Nähe der Bahn des Sterns Lücken, welche erst im Laufe der Zeit durch die in den verschiedensten Bahnen um die Sonne gehenden Meteorsteinschwärme ausgefüllt werden. Das verloren gegangene Material wird vielleicht von aussen her wieder ersetzt, worauf die hyperbolischen Bahnen einiger Kometen und Meteorsteinschwärme hinzudeuten scheinen.

Abgesehen von diesen kleineren Veränderungen wird also im allgemeinen die Constitution eines Planetensystems durch das Eindringen eines Sterns mit grosser Geschwindigkeit nicht wesentlich beeinflusst.

Wilhelm Ebert.

Paris, October 1896.



TAFEL.

⊙ Sonne.

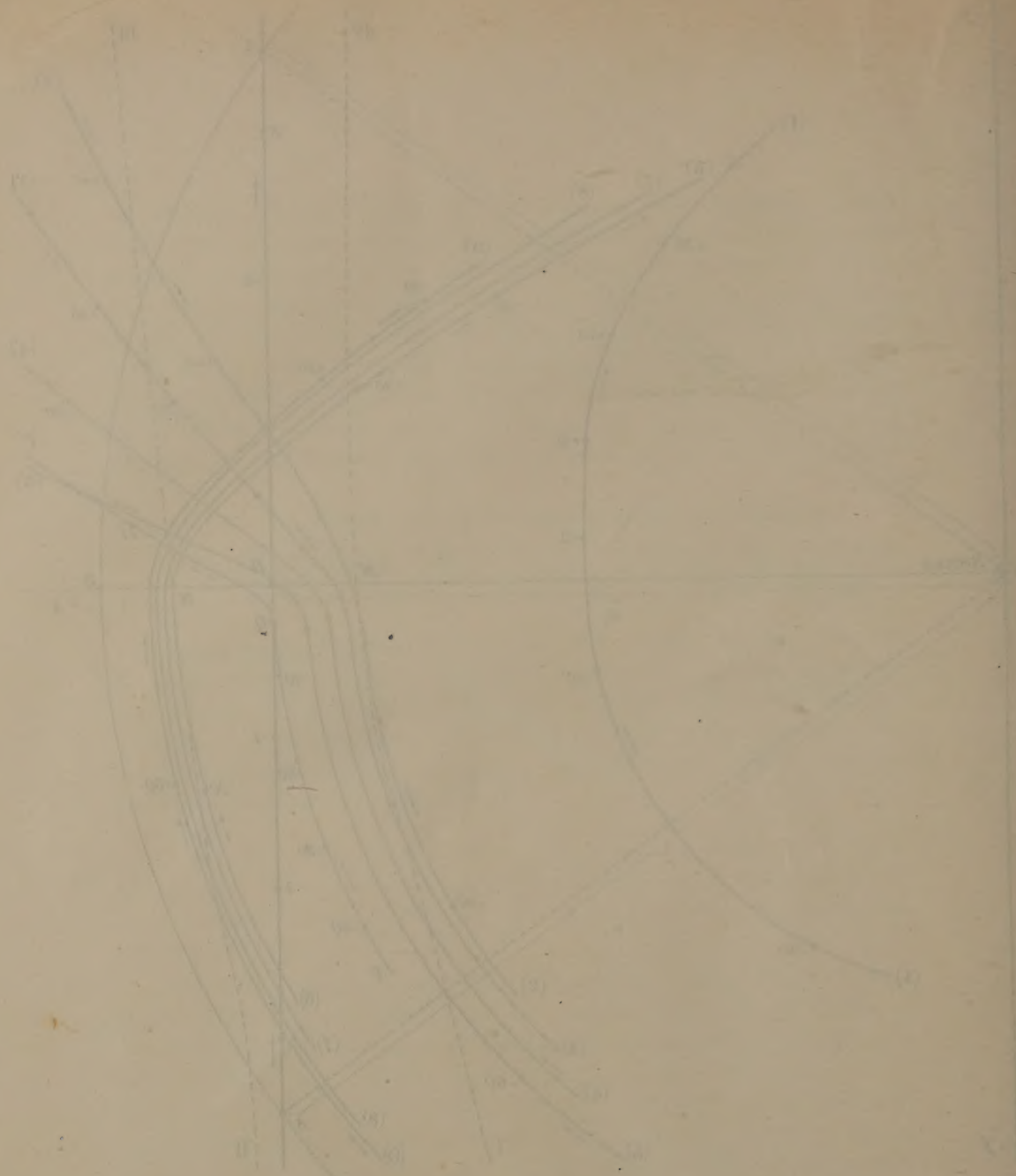
AΠA' Bahn des Sterns.

Π Perihel » »

PQP' Bahn des im ersten Teile betrachteten Planeten.

(1) — (1'), (2) — (2') ... (9) — (9') Bahnen der Planeten des § 17.

{ I M IV innere / II N III äussere } Stabilitätsgrenze für rechtläufige Kreisbahnen (Siehe § 27).

ASA' Ideale Kreisbahn um die Sonne. (Vergl. § 26.)

Die nicht eingeklammerten Zahlen geben die den Punkten der Bahnen entsprechenden Zeiten. (Vergl. § 3).